

# POTENCIAL ELÉCTRICO

# 23



Un rayo deja en libertad una asombrosa cantidad de energía potencial eléctrica. La carga fluye entre una nube y el suelo con una rapidez que llega a superar los  $10^5$  coulomb por segundo. La energía potencial eléctrica por coulomb, esto es, el potencial eléctrico, que este proceso libera puede llegar a ser de hasta  $10^7$  joule por coulomb, o  $10^7$  volt.

? Muchos edificios tienen pararrayos que los protegen de los daños de las descargas eléctricas que ocurren en la atmósfera, entre una nube y en este caso el edificio. Pero, ¿cómo funcionan los pararrayos?

**E**ste capítulo se ocupa de la energía asociada con las interacciones eléctricas. Cada vez que activamos la iluminación, un reproductor de discos compactos o un aparato eléctrico, hacemos uso de la energía eléctrica, un ingrediente indispensable de nuestra sociedad tecnológica. En los capítulos 6 y 7 presentamos los conceptos de *trabajo* y *energía* en el panorama de la mecánica; ahora combinaremos estos conceptos con lo que hemos aprendido acerca de la carga eléctrica, las fuerzas eléctricas y los campos eléctricos. Así como el concepto de energía hizo posible resolver de un modo muy sencillo cierta clase de problemas de mecánica, el uso de ideas sobre la energía facilita la resolución de una gran variedad de problemas de electricidad.

Cuando una partícula con carga se desplaza en un campo eléctrico, el campo ejerce una fuerza que puede realizar *trabajo* sobre la partícula. Este trabajo se puede expresar siempre en términos de energía potencial eléctrica. Del mismo modo que la energía potencial gravitatoria depende de la altura de una masa respecto a la superficie terrestre, la energía potencial eléctrica depende de la posición de la partícula con carga en el campo eléctrico. Describiremos la energía potencial eléctrica con base en un nuevo concepto denominado *potencial eléctrico*, o simplemente *potencial*. En los circuitos, una diferencia de potencial entre un punto y otro suele recibir el nombre de *voltaje*. Los conceptos de potencial y voltaje son cruciales para comprender cómo funcionan los circuitos eléctricos y tienen aplicaciones igualmente importantes en los haces de electrones de los cinescopios de televisión, los aceleradores de partículas de alta energía y muchos otros dispositivos.

## 23.1 | Energía potencial eléctrica

Los conceptos de trabajo, energía potencial y conservación de la energía probaron ser sumamente útiles en nuestro estudio de la mecánica. En esta sección mostraremos que estos conceptos resultan igualmente útiles para comprender y analizar las interacciones eléctricas.

Iniciemos con un repaso de varios puntos fundamentales de los capítulos 6 y 7. Primero, cuando una fuerza  $\vec{F}$  actúa sobre una partícula que se desplaza del punto  $a$  al punto  $b$ , el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  realizado por la fuerza está dado por una *integral de línea*:

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b F \cos \phi \, dl \quad (\text{trabajo realizado por una fuerza}) \quad (23.1)$$

donde  $d\vec{l}$  es un desplazamiento infinitesimal a lo largo de la trayectoria de la partícula y  $\phi$  es el ángulo entre  $\vec{F}$  y  $d\vec{l}$  en cada punto a lo largo de la trayectoria.

Segundo, si la fuerza  $\vec{F}$  es *conservativa*, como se definió el término en la sección 7.3, el trabajo realizado por  $\vec{F}$  siempre se puede expresar en términos de una **energía potencial**  $U$ . Cuando la partícula se desplaza de un punto donde la energía potencial es  $U_a$  a un punto donde es  $U_b$ , el cambio de energía potencial es  $\Delta U = U_b - U_a$  y el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  realizado por la fuerza es

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b = -(U_b - U_a) = -\Delta U \quad (23.2)$$

(trabajo realizado por una fuerza conservativa)

Cuando  $W_{a \rightarrow b}$  es positivo,  $U_a$  es mayor que  $U_b$ ,  $\Delta U$  es negativa, y la energía potencial *disminuye*. Esto es lo que ocurre cuando una pelota de béisbol cae de un punto alto ( $a$ ) a un punto más bajo ( $b$ ) por influencia de la gravedad de la Tierra; la fuerza de gravedad realiza trabajo positivo y la energía potencial gravitatoria disminuye. Cuando una pelota que ha sido lanzada se desplaza hacia arriba, la fuerza gravitatoria realiza trabajo negativo durante el ascenso y la energía potencial aumenta.

Tercero, el teorema de trabajo-energía afirma que el cambio de energía cinética  $\Delta K = K_b - K_a$  durante cualquier desplazamiento es igual al trabajo *total* realizado sobre la partícula. Si el único trabajo que se realiza sobre la partícula está a cargo de fuerzas conservativas, entonces la ecuación (23.2) da el trabajo total y  $K_b - K_a = -(U_b - U_a)$ . Habitualmente esto se escribe como

$$K_a + U_a = K_b + U_b \quad (23.3)$$

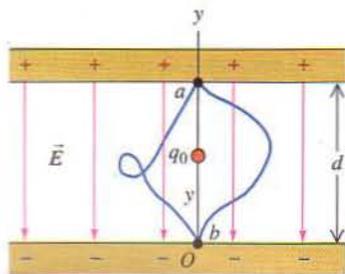
Esto es, la energía mecánica total (cinética más potencial) se *conserva* en estas circunstancias.

### Energía potencial eléctrica en un campo uniforme

Examinemos un ejemplo eléctrico de estos conceptos básicos. En la figura 23.1 un par de placas metálicas paralelas con carga establecen un campo eléctrico descendente uniforme de magnitud  $E$ . El campo ejerce una fuerza hacia abajo de magnitud  $F = q_0 E$  sobre una carga positiva de prueba  $q_0$ . Conforme la carga se desplaza hacia abajo una distancia  $d$  del punto  $a$  al punto  $b$ , la fuerza sobre la carga de prueba es constante e independiente de su ubicación. Por tanto, el trabajo realizado por el campo eléctrico es el producto de la magnitud de la fuerza por la componente de desplazamiento en la dirección (descendente) de la fuerza:

$$W_{a \rightarrow b} = Fd = q_0 E d \quad (23.4)$$

Este trabajo es positivo, puesto que la fuerza tiene la misma dirección que el desplazamiento neto de la carga de prueba.



**23.1** Una carga de prueba  $q_0$  que se desplaza trasladada de  $a$  a  $b$  experimenta una fuerza de magnitud  $q_0 E$ . El trabajo que esta fuerza realiza es  $W_{a \rightarrow b} = q_0 E d$ , y es independiente de la trayectoria la partícula.

La componente  $y$  de la fuerza eléctrica,  $F_y = -q_0E$ , es constante, y no hay componente  $x$  ni  $z$ . Esto es exactamente análogo a la fuerza gravitatoria sobre una masa  $m$  cerca de la superficie terrestre; esta fuerza tiene una componente  $y$  constante  $F_y = -mg$  y sus componentes  $x$  y  $z$  son cero. En virtud de esta analogía, se puede concluir que la fuerza ejercida sobre  $q_0$  por el campo eléctrico uniforme de la figura 23.1 es *conservativa*, como lo es la fuerza gravitatoria. Esto significa que el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  realizado por el campo es independiente de la trayectoria que la partícula sigue de  $a$  a  $b$ . Se puede representar este trabajo mediante una función de *energía potencial*  $U$ , como se hizo en el caso de la energía potencial gravitatoria en la sección 7.1. La energía potencial correspondiente a la fuerza gravitatoria  $F_y = -mg$  era  $U = mgy$ ; por consiguiente, la energía potencial que corresponde a la fuerza eléctrica  $F_y = -q_0E$  es

$$U = q_0Ey \quad (23.5)$$

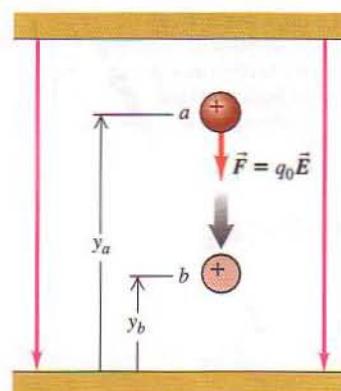
Cuando la carga de prueba se desplaza de la altura  $y_a$  a la altura  $y_b$ , el trabajo realizado sobre la partícula por el campo está dado por

$$W_{a \rightarrow b} = -\Delta U = -(U_b - U_a) = -(q_0Ey_b - q_0Ey_a) = q_0E(y_a - y_b) \quad (23.6)$$

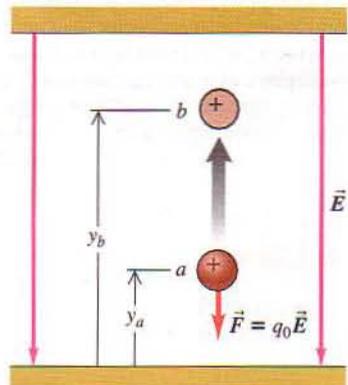
Cuando  $y_a$  es mayor que  $y_b$  (Fig. 23.2a), la carga positiva de prueba  $q_0$  se mueve hacia abajo, en la misma dirección de  $\vec{E}$ ; el desplazamiento tiene la misma dirección que la fuerza  $\vec{F} = q_0\vec{E}$ , por tanto, el campo realiza trabajo positivo y  $U$  disminuye. (En particular, si  $y_a - y_b = d$  como en la figura 23.1, la ecuación (23.6) da  $W_{a \rightarrow b} = q_0Ed$ , en concordancia con la ecuación (23.4).) Cuando  $y_a$  es menor que  $y_b$  (Fig. 23.2b), la carga positiva de prueba  $q_0$  se mueve hacia arriba, en dirección opuesta a  $\vec{E}$ ; el desplazamiento es opuesto a la fuerza, el campo realiza trabajo negativo y  $U$  aumenta.

Si la carga de prueba  $q_0$  es *negativa*, la energía potencial aumenta cuando la carga se desplaza con el campo y disminuye cuando el desplazamiento es contra el campo (Fig. 23.3).

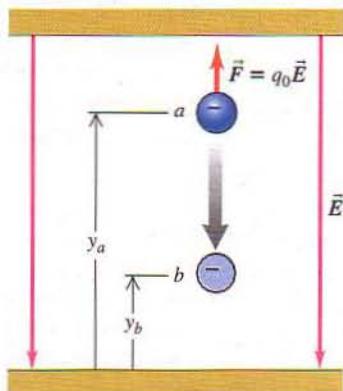
Ya sea que la carga de prueba sea positiva o negativa, se aplican las reglas generales siguientes:  $U$  *aumenta* si la carga de prueba  $q_0$  se desplaza en la dirección *opuesta* a la fuerza eléctrica  $\vec{F} = q_0\vec{E}$  (Figs. 23.2b y 23.3a);  $U$  *disminuye* si  $q_0$  se desplaza en la *misma* dirección de  $\vec{F} = q_0\vec{E}$  (Figs. 23.2a y 23.3b). Este comportamiento es el mismo que el de la energía potencial gravitatoria, la cual aumenta si



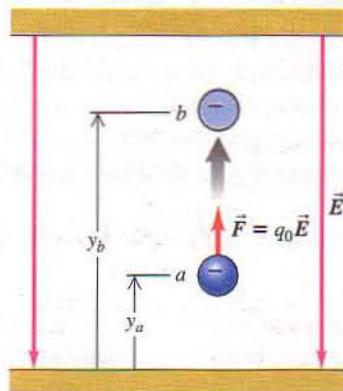
(a) La carga positiva se desplaza en la dirección de  $\vec{E}$ ; el campo realiza trabajo positivo sobre la carga y la energía potencial  $U$  disminuye



(b) La carga positiva se desplaza en dirección opuesta a  $\vec{E}$ ; el campo realiza trabajo negativo sobre la carga y la energía potencial  $U$  aumenta



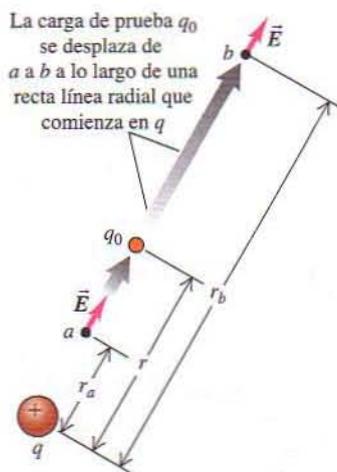
(a) La carga negativa se desplaza en la dirección de  $\vec{E}$ ; el campo realiza trabajo negativo sobre la carga y la energía potencial  $U$  aumenta



(b) La carga negativa se desplaza en dirección opuesta a  $\vec{E}$ ; el campo realiza trabajo positivo sobre la carga y la energía potencial  $U$  disminuye

**23.3** Carga negativa desplazándose (a) en la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  y (b) en dirección opuesta a  $\vec{E}$ . Compárese con la figura 23.2.

**23.2** Carga positiva desplazándose (a) en la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$  y (b) en dirección opuesta a  $\vec{E}$ .



**23.4** La carga de prueba  $q_0$  se desplaza a lo largo de una línea recta que se extiende radialmente a partir de la carga  $q$ . Conforme se desplaza de  $a$  a  $b$ , la distancia varía de  $r_a$  a  $r_b$ .

una masa  $m$  se desplaza hacia arriba (en dirección opuesta a la de la fuerza gravitatoria) y disminuye si  $m$  se desplaza hacia abajo (en la misma dirección de la fuerza gravitatoria).

**CUIDADO** La relación entre el cambio de energía potencial eléctrica y el movimiento en un campo eléctrico es importante y la utilizaremos con frecuencia. Es además una relación cuya comprensión verdadera no requiere mucho esfuerzo. Dedique el tiempo necesario a repasar minuciosamente el párrafo anterior y a estudiar con cuidado las figuras 23.2 y 23.3. ¡Hacerlo ahora le será de enorme utilidad más adelante!

### Energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales

La idea de energía potencial eléctrica no está restringida al caso especial de un campo eléctrico uniforme. De hecho, se puede aplicar este concepto a una carga puntual en *cualquier* campo eléctrico creado por una distribución de carga estática. Recuerde (capítulo 21) que se puede representar cualquier distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales. Por consiguiente, resulta útil calcular el trabajo realizado sobre una carga de prueba  $q_0$  que se desplaza en el campo eléctrico creado por una sola carga puntual estacionaria  $q$ .

Consideraremos en primer término un desplazamiento a lo largo de la línea radial de la figura 23.4, del punto  $a$  al punto  $b$ . La fuerza sobre  $q_0$  está dada por la ley de Coulomb y su componente radial es

$$F_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \quad (23.7)$$

Si  $q$  y  $q_0$  tienen el mismo signo (+ o -), la fuerza es de repulsión y  $F_r$  es positiva; si las dos cargas tienen signos opuestos, la fuerza es de atracción y  $F_r$  es negativa. La fuerza *no* es constante durante el desplazamiento y es necesario integrar para calcular el trabajo  $W_{a \rightarrow b}$  realizado sobre  $q_0$  por esta fuerza conforme  $q_0$  se desplaza de  $a$  a  $b$ . Resulta que

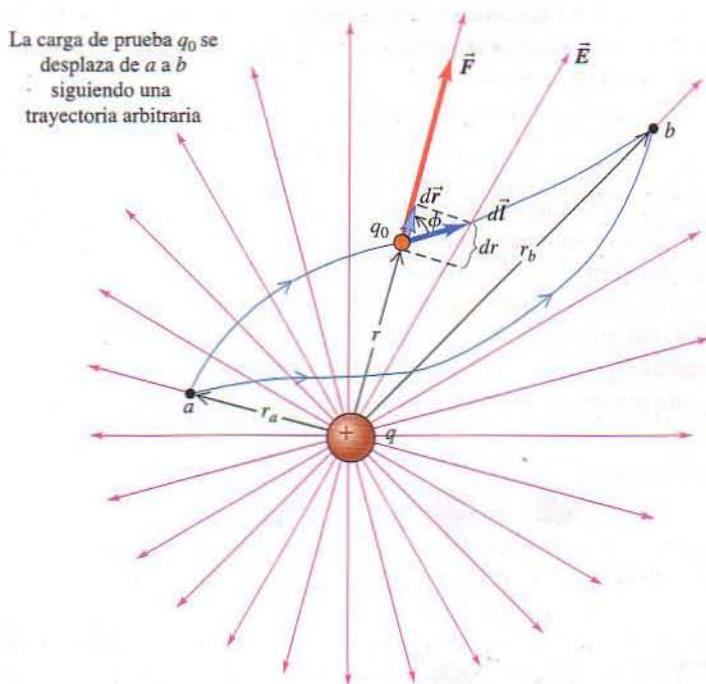
$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} F_r dr = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} dr = \frac{qq_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right) \quad (23.8)$$

El trabajo realizado por la fuerza eléctrica en el caso de esta trayectoria en particular depende sólo de los puntos extremos.

De hecho, el trabajo es el mismo en *todas las trayectorias posibles* de  $a$  a  $b$ . Para probarlo, consideremos un desplazamiento más general (Fig. 23.5) en el que  $a$  y  $b$  no se encuentran sobre la misma línea radial. De la ecuación (23.1), el trabajo realizado sobre  $q_0$  durante este desplazamiento está dado por

$$W_{a \rightarrow b} = \int_{r_a}^{r_b} F \cos \phi dl = \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2} \cos \phi dl$$

Pero la figura muestra que  $\cos \phi dl = dr$ . Es decir, el trabajo realizado durante un desplazamiento pequeño  $d\vec{l}$  depende únicamente del cambio  $dr$  de la distancia  $r$  entre las cargas, que es la *componente radial* del desplazamiento. Por consiguiente, la ecuación (23.8) es válida incluso con respecto a este desplazamiento más general; el trabajo realizado sobre  $q_0$  por el campo eléctrico  $\vec{E}$  producido por  $q$  depende sólo de  $r_a$  y  $r_b$ , no de los detalles de la trayectoria. Asimismo, si  $q_0$  regresa a su punto de partida  $a$  por un camino diferente, el trabajo total realizado en el desplazamiento de un viaje de ida y vuelta es cero (la integral de la ecuación (23.8) es de  $r_a$  de nuevo a  $r_a$ ). Éstas son las características necesarias de una fuerza conservativa, según se definió en la sección 7.3. Por tanto, la fuerza sobre  $q_0$  es una fuerza *conservativa*.



**23.5** El trabajo que el campo eléctrico de la carga  $q$  realiza sobre la carga  $q_0$  no depende de la trayectoria seguida, sino sólo de las distancias  $r_a$  y  $r_b$ .

Vemos que las ecuaciones (23.2) y (23.8) son consistentes si definimos  $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_a$  como la energía potencial  $U_a$  cuando  $q_0$  está en el punto  $a$ , a una distancia  $r_a$  de  $q$ , y definimos  $qq_0/4\pi\epsilon_0 r_b$  como la energía potencial  $U_b$  cuando  $q_0$  está en el punto  $b$ , a una distancia  $r_b$  desde  $q$ . Por tanto, la energía potencial  $U$  cuando la carga de prueba  $q_0$  está a cualquier distancia  $r$  de la carga  $q$  es

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} \quad (23.9)$$

(energía potencial eléctrica de dos cargas puntuales  $q$  y  $q_0$ )

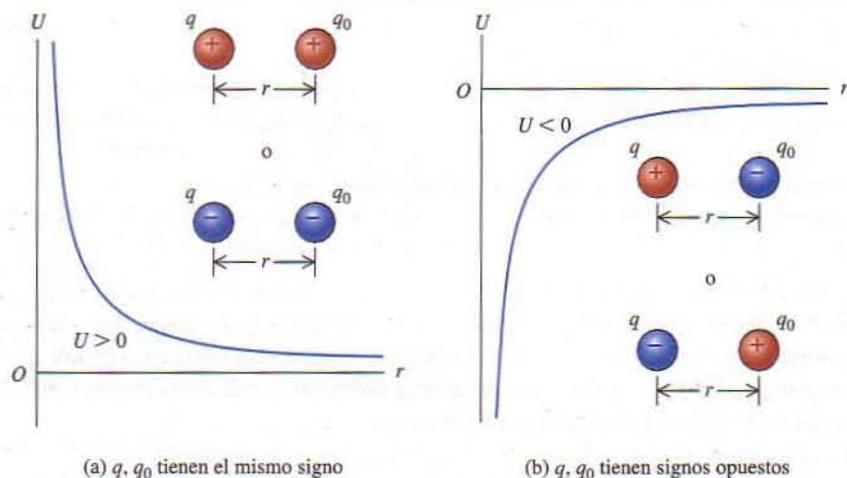
Dése cuenta que *nada* hemos supuesto acerca de los signos de  $q$  y  $q_0$ ; la ecuación (23.9) es válida con cualquier combinación de signos. La energía potencial es positiva si las cargas  $q$  y  $q_0$  tienen el mismo signo (Fig. 23.6a), y negativa si tienen signos opuestos (Fig. 23.6b).

**CUIDADO** Tenga cuidado de no confundir la ecuación (23.9) de la energía potencial de dos cargas puntuales con la expresión similar de la ecuación (23.7) que corresponde a la componente radial de la fuerza eléctrica que una carga ejerce sobre la otra. La energía potencial  $U$  es proporcional a  $1/r$ ; en cambio, la componente de fuerza  $F_r$  es proporcional a  $1/r^2$ .

La energía potencial siempre se define en relación con cierto punto de referencia donde  $U = 0$ . En la ecuación (23.9),  $U$  es cero cuando  $q$  y  $q_0$  están separados por una distancia infinita y  $r = \infty$ . Por consiguiente,  $U$  representa el trabajo que el campo de  $q$  realizaría sobre la carga de prueba  $q_0$  si  $q_0$  se desplaza desde una distancia inicial  $r$  al infinito. Si  $q$  y  $q_0$  tienen el mismo signo, la interacción es de repulsión, este trabajo es positivo y  $U$  es positiva en cualquier separación finita (Fig. 23.6a). Si las cargas tienen signos opuestos, la interacción es de atracción, el trabajo realizado es negativo y  $U$  es negativa (Fig. 23.6b).

Conviene hacer hincapié en que la energía potencial  $U$  dada por la ecuación (23.9) es una propiedad *compartida* de las dos cargas  $q$  y  $q_0$ ; es consecuencia de la *interacción* entre estos dos cuerpos. Si la distancia entre las dos cargas cambia de  $r_a$  a  $r_b$ , el campo de energía potencial es el mismo ya sea que  $q$  se mantenga fija y  $q_0$  se desplace o que  $q_0$  se mantenga fija y  $q$  se desplace. Por esta razón, nunca empleamos la frase “la energía potencial eléctrica de una carga puntual”. (De la misma manera, si una masa  $m$  está a una altura  $h$  sobre la superficie terrestre, la energía potencial gravitatoria es una propiedad compartida de la masa  $m$  y la Tierra. Insistimos en ello en las secciones 7.1 y 12.3).

La ley de Gauss nos dice que el campo eléctrico afuera de cualquier distribución de carga esféricamente simétrica es el mismo como si toda la carga estuviese concentrada en el centro. Debido a eso, la ecuación (23.9) también es válida si la carga de prueba  $q_0$  está afuera de cualquier distribución de carga esféricamente simétrica con una carga total  $q$  a una distancia  $r$  del centro.



**23.6** Gráficas de la energía potencial  $U$  de dos cargas puntuales  $q$  y  $q_0$  en función de su separación  $r$ .

(a)  $q, q_0$  tienen el mismo signo

(b)  $q, q_0$  tienen signos opuestos

### Ejemplo 23.1

## Conservación de energía con fuerzas eléctricas

Un positrón (la antipartícula del electrón) tiene una masa de  $9.11 \times 10^{-31}$  kg y una carga  $+e = +1.60 \times 10^{-19}$  C. Suponga que un positrón se desplace en las cercanías de una partícula alfa, cuya carga es  $+2e = 3.20 \times 10^{-19}$  C. La partícula alfa tiene una masa más de 7000 veces mayor que la del positrón; por tanto, suponemos que está en reposo en cierto marco inercial de referencia. Cuando el positrón está a  $1.00 \times 10^{-10}$  m de la partícula alfa, se aleja directamente de ésta con una rapidez de  $3.00 \times 10^6$  m/s. a) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando las dos partículas están a  $2.00 \times 10^{-10}$  m una de la otra? b) ¿Cuál es la rapidez del positrón cuando está muy lejos de la partícula alfa? c) ¿Cómo cambiaría la situación si la partícula en movimiento fuera un electrón (misma masa que el positrón pero carga opuesta)?

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR:** La fuerza eléctrica entre el positrón y la partícula alfa es conservativa; de esta manera, se conserva la energía mecánica (cinética más potencial).

**PLANTEAR:** Las energías cinética y potencial en dos puntos cualesquiera  $a$  y  $b$  están relacionadas por la ecuación (23.3),  $K_a + U_a =$

$K_b + U_b$ , y la energía potencial a cualquier distancia  $r$  está dada por la ecuación (23.9). Tenemos información completa acerca del sistema en un punto  $a$  donde las dos cargas están a  $1.00 \times 10^{-10}$  m una de otra. Se emplean las ecuaciones (23.3) y (23.9) para hallar la rapidez en dos valores diferentes de  $r$  en los incisos (a) y (b), y en el caso donde la carga  $+e$  se sustituye por  $-e$  en el inciso (c).

**EJECUTAR:** a) En esta parte,  $r_b = 2.00 \times 10^{-10}$  m y se desea hallar la rapidez final  $v_b$  del positrón. Ésta aparece en la expresión de la energía cinética final,  $K_b = \frac{1}{2}mv_b^2$ ; despejando  $K_b$  de la ecuación de conservación de la energía se obtiene

$$K_b = K_a + U_a - U_b$$

Los valores de las energías del lado derecho de esta expresión son

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{1}{2}mv_a^2 = \frac{1}{2}(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(3.00 \times 10^6 \text{ m/s})^2 \\ &= 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} \end{aligned}$$

$$U_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r_a}$$

$$\begin{aligned}
 &= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(3.20 \times 10^{-19} \text{ C})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})}{1.00 \times 10^{-10} \text{ m}} \\
 &= 4.61 \times 10^{-18} \text{ J} \\
 U_b &= (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(3.20 \times 10^{-19} \text{ C})(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})}{2.00 \times 10^{-10} \text{ m}} \\
 &= 2.30 \times 10^{-18} \text{ J}
 \end{aligned}$$

Por tanto, la energía cinética final es

$$\begin{aligned}
 K_b &= \frac{1}{2} m v_b^2 \\
 &= 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} + 4.61 \times 10^{-18} \text{ J} - 2.30 \times 10^{-18} \text{ J} \\
 &= 6.41 \times 10^{-18} \text{ J}
 \end{aligned}$$

y la rapidez final del positrón es

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(6.41 \times 10^{-18} \text{ J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 3.8 \times 10^6 \text{ m/s}$$

La fuerza es de repulsión; así, el positrón se acelera conforme se aleja de la partícula alfa estacionaria.

b) Cuando las posiciones finales del positrón y de la partícula alfa están muy lejos una de otra, la separación  $r_b$  tiende a infinito y la energía potencial final  $U_b$  tiende a cero. Entonces la energía cinética final del positrón es

$$\begin{aligned}
 K_b &= K_a + U_a - U_b = 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} + 4.61 \times 10^{-18} \text{ J} - 0 \\
 &= 8.71 \times 10^{-18} \text{ J}
 \end{aligned}$$

y su rapidez final es

$$v_b = \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = \sqrt{\frac{2(8.71 \times 10^{-18} \text{ J})}{9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}}} = 4.4 \times 10^6 \text{ m/s}$$

Comparando con el inciso (a), vemos que a medida que el positrón se desplaza de  $r = 2.00 \times 10^{-10} \text{ m}$  al infinito, el trabajo adicional que el campo eléctrico de la partícula alfa realiza sobre el positrón

aumenta su rapidez aproximadamente un 16%. Esto se debe a que la fuerza eléctrica disminuye rápidamente con la distancia.

c) Si la carga en movimiento es negativa, la fuerza sobre ella es de atracción en vez de repulsión, y es de esperar que disminuya su velocidad en vez aumentarla. La única diferencia en los cálculos precedentes es que ambas cantidades de energía potencial son negativas. Del inciso (a), a una distancia  $r_b = 2.00 \times 10^{-10} \text{ m}$  se tiene

$$\begin{aligned}
 K_b &= K_a + U_a - U_b \\
 &= 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} + (-4.61 \times 10^{-18} \text{ J}) \\
 &\quad - (-2.30 \times 10^{-18} \text{ J}) \\
 &= 1.79 \times 10^{-18} \text{ J} \\
 v_b &= \sqrt{\frac{2K_b}{m}} = 2.0 \times 10^6 \text{ m/s}
 \end{aligned}$$

Del inciso (b), en  $r_b = \infty$  la energía cinética del electrón sería, al parecer,

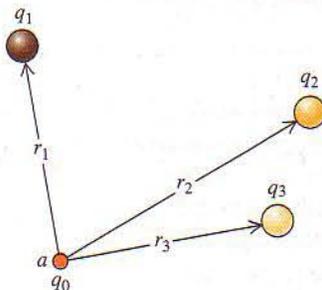
$$\begin{aligned}
 K_b &= K_a + U_a - U_b = 4.10 \times 10^{-18} \text{ J} \\
 &\quad + (-4.61 \times 10^{-18} \text{ J}) - 0 \\
 &= -5.1 \times 10^{-19} \text{ J}
 \end{aligned}$$

¡Pero las energías cinéticas *nunca* son negativas! Este resultado significa que el electrón jamás alcanza  $r_b = \infty$ ; la fuerza de atracción detiene el electrón a una distancia finita de la partícula alfa. El electrón comienza entonces a regresar hacia la partícula alfa. Se puede despejar la distancia  $r_b$  a la que el electrón se detiene momentáneamente haciendo  $K_b = 0$  en la ecuación de conservación de la energía mecánica (véase el ejercicio 23.8).

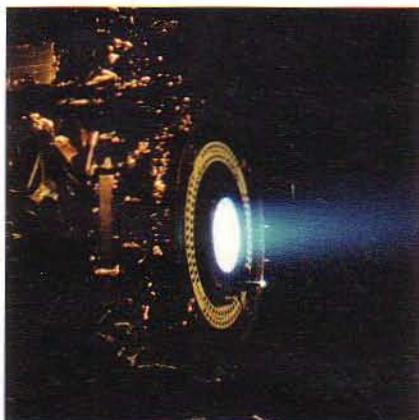
**EVALUAR:** Es provechoso comparar nuestros cálculos con la figura 23.6. En los incisos (a) y (b) las cargas tienen el mismo signo; puesto que  $r_b > r_a$ , la energía potencial  $U_b$  es menor que  $U_a$ . En el inciso (c) las cargas tienen signos opuestos; puesto que  $r_b > r_a$ , la energía potencial  $U_b$  es mayor (es decir, menos negativa) que  $U_a$ .

## Energía potencial eléctrica con varias cargas puntuales

Supóngase que el campo eléctrico  $\vec{E}$  en el que se desplaza la carga  $q_0$  se debe a *varias* cargas puntuales  $q_1, q_2, q_3, \dots$  a distancias  $r_1, r_2, r_3, \dots$  de  $q_0$ , como en la figura 23.7. Por ejemplo,  $q_0$  podría ser un ion positivo que se desplaza en presencia de otros iones (Fig. 23.8). El campo eléctrico total en cada punto es la *suma vectorial* de los campos debidos a las cargas individuales, y el trabajo total que se realiza sobre  $q_0$  durante cual-



**23.7** La energía potencial asociada con una carga  $q_0$  en el punto  $a$  depende de las otras cargas  $q_1, q_2$  y  $q_3$ , así como de sus distancias  $r_1, r_2$  y  $r_3$  respecto al punto  $a$ .



**23.8** Este motor iónico para vehículos espaciales expulsa un chorro de iones xenón positivos ( $\text{Xe}^+$ ) con una rapidez de más de 30 km/s. La propulsión que produce es muy pequeña (alrededor de 0.09 newton), pero se puede mantener continuamente durante varios días, en contraste con los cohetes químicos, que generan una gran propulsión durante un tiempo breve (véase la Fig. 8.29). Estos motores iónicos se han utilizado para hacer maniobras con naves espaciales interplanetarias.

quier desplazamiento es la suma de las contribuciones de las cargas individuales. De la ecuación (23.9) se concluye que la energía potencial asociada con la carga de prueba  $q_0$  en el punto  $a$  de la figura 23.7 es la suma *algebraica* (no la suma vectorial)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.10)$$

(carga puntual  $q_0$  y conjunto de cargas  $q_i$ )

Cuando  $q_0$  está en un punto diferente  $b$ , la energía potencial está dada por la misma expresión, pero  $r_1, r_2, \dots$  son las distancias de  $q_1, q_2, \dots$  al punto  $b$ . El trabajo realizado sobre la carga  $q_0$  cuando ésta se desplaza de  $a$  a  $b$  a lo largo de cualquier trayectoria es igual a la diferencia  $U_a - U_b$  entre las energías potenciales cuando  $q_0$  está en  $a$  y en  $b$ .

Podemos representar *cualquier* distribución de carga como un conjunto de cargas puntuales; por tanto, la ecuación (23.10) exhibe que siempre se puede hallar una función energía-potencial para *cualquier* campo eléctrico estático. Se sigue que **con respecto a cada campo eléctrico debido a una distribución de carga estática, la fuerza ejercida por ese campo es conservativa.**

Las ecuaciones (23.9) y (23.10) definen  $U$  como cero cuando todas las distancias  $r_1, r_2, \dots$  son infinitas, es decir, cuando la carga de prueba  $q_0$  está muy lejos de todas las cargas que producen el campo. Como en toda función de energía potencial, el punto donde  $U = 0$  es arbitrario; siempre se puede agregar una constante para hacer  $U$  igual a cero en cualquier punto que se elija. Por lo regular, en los problemas de electrostática lo más simple es decidir que ese punto esté en el infinito. Cuando analicemos los circuitos eléctricos en los capítulos 25 y 26, otras opciones serán más convenientes.

La ecuación (23.10) da la energía potencial asociada con la presencia de la carga de prueba  $q_0$  en el campo  $\vec{E}$  producido por  $q_1, q_2, q_3, \dots$ . Pero también interviene una energía potencial en el acto de reunir estas cargas. Si en un principio las cargas  $q_1, q_2, q_3, \dots$  están todas separadas unas de otras por distancias infinitas, y luego las juntamos de modo que la distancia entre  $q_i$  y  $q_j$  sea  $r_{ij}$ , la energía potencial *total*  $U$  es la suma de las energías potenciales de interacción de cada par de cargas. Esto se puede escribir como

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} \quad (23.11)$$

Esta suma se extiende a todos los *pares* de cargas; no se hace que  $i = j$  (porque eso sería una interacción de una carga consigo misma), y se incluyen sólo términos con  $i < j$  para asegurar que se cuente cada par sólo una vez. Así, para tener en cuenta la interacción entre  $q_3$  y  $q_4$  se incluye un término con  $i = 3$  y  $j = 4$ , pero no un término con  $i = 4$  y  $j = 3$ .

### Interpretación de la energía potencial eléctrica

Como comentario final, he aquí dos puntos de vista sobre la energía potencial eléctrica. La hemos definido en términos del trabajo realizado *por el campo eléctrico* sobre una partícula con carga que se desplaza en el campo, de igual modo que en el capítulo 7 definimos la energía potencial en términos del trabajo realizado por la gravedad o por un resorte. Cuando una partícula se desplaza del punto  $a$  al punto  $b$ , el trabajo que sobre ella realiza el campo eléctrico es  $W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b$ . Por tanto, la diferencia de energía potencial  $U_a - U_b$  es igual *al trabajo que la fuerza eléctrica realiza cuando la partícula se desplaza de  $a$  a  $b$* . Cuando  $U_a$  es mayor que  $U_b$ , el

campo realiza trabajo positivo sobre la partícula cuando ésta “cae” de un punto de más energía potencial ( $a$ ) a un punto de menos energía potencial ( $b$ ).

No obstante, otro punto de vista, equivalente, consiste en considerar cuánto trabajo se tendría que hacer para “subir” una partícula de un punto  $b$ , donde la energía potencial es  $U_b$ , a un punto  $a$  donde la energía potencial tiene un valor mayor  $U_a$  (por ejemplo, empujar dos cargas positivas para acercarlas). Para mover la partícula lentamente (a modo de no impartirle energía cinética) necesitamos ejercer una fuerza externa adicional  $\vec{F}_{\text{ext}}$  que es igual y opuesta a la fuerza del campo eléctrico y realiza trabajo positivo. La diferencia de energía potencial  $U_a - U_b$  se define entonces como *el trabajo que debe realizar una fuerza externa para desplazar la partícula lentamente de  $b$  a  $a$  contra la fuerza eléctrica*. Puesto que  $\vec{F}_{\text{ext}}$  es el negativo de la fuerza del campo eléctrico y el desplazamiento es en dirección opuesta, esta definición de la diferencia de potencial  $U_a - U_b$  es equivalente a la que se dio anteriormente. Este otro punto de vista también es válido si  $U_a$  es menor que  $U_b$ , lo que corresponde a “bajar” la partícula; un ejemplo es el alejamiento de dos cargas positivas una de otra. En este caso,  $U_a - U_b$  es de nuevo igual al trabajo realizado por la fuerza externa, pero ahora este trabajo es negativo.

Haremos uso de estos dos puntos de vista en la sección siguiente a fin de interpretar el significado del potencial eléctrico, o energía potencial por unidad de carga.

### Ejemplo 23.2

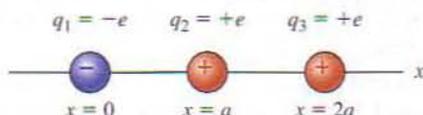
### Sistema de cargas puntuales

Dos cargas puntuales están sobre el eje  $x$ :  $q_1 = -e$  en  $x = 0$  y  $q_2 = +e$  en  $x = a$ . a) Halle el trabajo que debe realizar una fuerza externa para traer una tercera carga  $q_3 = +e$  desde el infinito hasta  $x = 2a$ . b) Halle la energía potencial total del sistema de tres cargas.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** La figura 23.9 muestra la disposición final de las tres cargas. Para hallar el trabajo necesario para traer  $q_3$  desde el infinito se emplea la ecuación (23.10) para encontrar la energía potencial asociada con  $q_3$  en presencia de  $q_1$  y  $q_2$ . En seguida se utiliza la ecuación (23.11) para hallar la energía potencial total del sistema.

**EJECUTAR:** a) El trabajo que una fuerza externa  $\vec{F}_{\text{ext}}$  debe realizar sobre  $q_3$  es igual a la diferencia entre dos cantidades: la energía potencial  $U$  asociada con  $q_3$  cuando ésta se halla en  $x = 2a$  y la energía potencial cuando la carga está infinitamente lejos. La segunda



**23.9** ¿Cuál es la energía potencial total de este sistema de cargas?

#### Evalúe su comprensión

¿Cuál es la energía potencial total del sistema de tres cargas del ejemplo 21.4 (sección 21.3)? ¿Es positivo o negativo el resultado? ¿Cuál es la interpretación física de este signo?

fuerza es cero; por tanto, el trabajo que se debe realizar es igual a  $U$ . Las distancias entre las cargas son  $r_{13} = 2a$  y  $r_{23} = a$ ; así pues, de la ecuación (23.10),

$$W = U = \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_{13}} + \frac{q_2}{r_{23}} \right) = \frac{+e}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{-e}{2a} + \frac{+e}{a} \right) = \frac{+e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

Si  $q_3$  se trae desde el infinito a lo largo del eje de las  $x$ , es atraída por  $q_1$  pero es repelida más intensamente por  $q_2$ ; por tanto, es preciso realizar trabajo positivo para empujar  $q_3$  hasta la posición donde  $x = 2a$ .

b) La energía potencial total del conjunto de tres cargas está dada por la ecuación (23.11):

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i < j} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right) \\ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{(-e)(e)}{a} + \frac{(-e)(e)}{2a} + \frac{(e)(e)}{a} \right) = \frac{-e^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

**EVALUAR:** Puesto que el resultado del inciso (b) es negativo, el sistema tiene menos energía potencial que si las tres cargas estuviesen separadas por distancias infinitas. Una fuerza externa tendría que realizar trabajo *negativo* para traer las tres cargas desde el infinito a fin de formar el arreglo completo, y tendría que realizar trabajo *positivo* para llevar las tres cargas de regreso al infinito.

## 23.2 | Potencial eléctrico

En la sección precedente examinamos la energía potencial  $U$  asociada con una carga de prueba  $q_0$  en un campo eléctrico. Ahora nos proponemos describir esta energía potencial sobre una base de “por unidad de carga”, del mismo modo que un campo eléctrico describe la fuerza por unidad de carga sobre una partícula con carga que se halla en el campo. Esto nos lleva al concepto de *potencial eléctrico*, al que se suele llamar simplemente *potencial*. Este concepto es muy útil en los cálculos relacionados con energías de partículas con carga. También facilita muchos cálculos de campos eléctricos, porque el potencial eléctrico está íntimamente relacionado con el campo eléctrico  $\vec{E}$ . Cuando se necesita hallar un campo eléctrico, suele ser más fácil determinar primero el potencial y luego hallar el campo a partir de él.

Un **potencial** es *energía potencial por unidad de carga*. Se define el potencial  $V$  en cualquier punto de un campo eléctrico como la energía potencial  $U$  por unidad de carga asociada con una carga de prueba  $q_0$  en ese punto:

$$V = \frac{U}{q_0} \quad \text{o} \quad U = q_0 V \quad (23.12)$$

La energía potencial y la carga son escalares; por consiguiente, el potencial es una cantidad escalar. Sus unidades se hallan, con base en la ecuación (23.12), dividiendo las unidades de energía entre las de carga. La unidad SI de potencial, llamada un **volt** (1 V) en honor del científico italiano y experimentador eléctrico Alessandro Volta (1745–1827), es igual a 1 joule por coulomb:

$$1 \text{ V} = 1 \text{ volt} = 1 \text{ J/C} = 1 \text{ joule/coulomb}$$

Expresemos la ecuación (23.2), que iguala el trabajo realizado por la fuerza eléctrica durante un desplazamiento de  $a$  a  $b$  con la cantidad  $-\Delta U = -(U_b - U_a)$ , sobre una base de “trabajo por unidad de carga”. Al dividir esta ecuación entre  $q_0$  se obtiene

$$\frac{W_{a \rightarrow b}}{q_0} = -\frac{\Delta U}{q_0} = -\left(\frac{U_b}{q_0} - \frac{U_a}{q_0}\right) = -(V_b - V_a) = V_a - V_b \quad (23.13)$$

donde  $V_a = U_a/q_0$  es la energía potencial por unidad de carga en el punto  $a$ , y análogamente en el caso de  $V_b$ . Llamamos a  $V_a$  y  $V_b$  el *potencial en el punto  $a$*  y *potencial en el punto  $b$* , respectivamente. Por tanto, el trabajo por unidad de carga realizado por la fuerza eléctrica cuando un cuerpo con carga se desplaza de  $a$  a  $b$  es igual al potencial en  $a$  menos el potencial en  $b$ .

A la diferencia  $V_a - V_b$  se le llama el *potencial de  $a$  con respecto a  $b$* ; a veces se abrevia esta diferencia como  $V_{ab} = V_a - V_b$  (dese cuenta en el orden de los subíndices). A esto se le suele llamar la diferencia de potencial entre  $a$  y  $b$ , pero resulta ambigua a menos que se especifique cuál es el punto de referencia. En los circuitos eléctricos, que analizaremos en capítulos siguientes, a la diferencia de potencial entre dos puntos se le suele llamar **voltaje** (Fig. 23.10). La ecuación (23.13) establece, por tanto, que  $V_{ab}$ , el **potencial de  $a$  con respecto a  $b$** , es igual al **trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando una UNIDAD de carga se desplaza de  $a$  a  $b$** .

Otra forma de interpretar la diferencia de potencial  $V_{ab}$  de la ecuación (23.10) consiste en adoptar el otro punto de vista mencionado en la sección 23.1. Según este punto de vista,  $U_a - U_b$  es la cantidad de trabajo que debe realizar una fuerza externa para desplazar lentamente una partícula de carga  $q_0$  de  $b$  a  $a$  contra la fuerza eléctrica. El trabajo que la fuerza externa debe realizar *por unidad de carga* es entonces  $(U_a - U_b)/q_0 = V_a - V_b = V_{ab}$ . En otras palabras,  $V_{ab}$ , el **potencial de  $a$  con respecto a  $b$** , es igual al **trabajo que es preciso realizar para desplazar lentamente una UNIDAD de carga de  $b$  a  $a$  contra la fuerza eléctrica**.



**23.10** El voltaje de esta batería es igual a la diferencia de potencial  $V_{ab} = V_a - V_b$  entre su borne positivo (punto  $a$ ) y su borne negativo (punto  $b$ ).

Un instrumento que mide la diferencia de potencial entre dos puntos recibe el nombre de *voltímetro*. En el capítulo 26 analizaremos el principio del tipo común de voltímetro de bobina móvil. Existen además dispositivos de medición de potencial mucho más sensibles que utilizan la amplificación electrónica. Son comunes los instrumentos capaces de medir diferencias de potencial de  $1 \mu\text{V}$ , y se alcanzan sensibilidades de hasta  $10^{-12} \text{V}$ .

Para hallar el potencial  $V$  debido a una sola carga puntual  $q$ , se divide la ecuación (23.9) entre  $q_0$ :

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (\text{potencial debido a una carga puntual}) \quad (23.14)$$

donde  $r$  es la distancia desde la carga puntual  $q$  al punto en el que se evalúa el potencial. Si  $q$  es positiva, el potencial que crea es positivo en todos los puntos; si  $q$  es negativa, produce un potencial que es negativo en todas partes. En ambos casos,  $V$  es igual a cero en  $r = \infty$ , a una distancia infinita de la carga puntual. Dese cuenta que el potencial, como el campo eléctrico, es independiente de la carga de prueba  $q_0$  que se utiliza para definirlo.

De modo análogo, se divide la ecuación (23.10) para hallar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales:

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.15)$$

(potencial debido a un conjunto de cargas puntuales)

En esta expresión,  $r_i$  es la distancia de la  $i$ ésima carga,  $q_i$ , al punto en el que se evalúa  $V$ . Si el campo eléctrico debido a un conjunto de cargas puntuales es la suma *vectorial* de los campos producidos por cada carga, en cambio el potencial eléctrico debido a un conjunto de cargas puntuales es la suma *escalar* de los potenciales debidos a cada carga. Cuando se tiene una distribución continua de carga a lo largo de una línea, en una superficie o en todo un volumen, se divide la carga en elementos  $dq$ , y la suma de la ecuación (23.15) se transforma en una integral:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (23.16)$$

(potencial debido a una distribución continua de carga)

donde  $r$  es la distancia del elemento de carga  $dq$  al punto de campo donde se evalúa  $V$ . Resolveremos varios ejemplos de casos de este tipo. El potencial definido por las ecuaciones (23.15) y (23.16) es cero en los puntos infinitamente alejados de *todas* las cargas. Más adelante encontraremos casos en los que la distribución misma de carga se extiende hasta el infinito. Veremos que en tales casos no se puede fijar  $V = 0$  en el infinito y será necesario tener cuidado al aplicar e interpretar las ecuaciones (23.15) y (23.16).

**CUIDADO** Antes de profundizar mucho en los pormenores de cómo calcular el potencial eléctrico, conviene hacer un alto y recordar qué es el potencial. El *potencial* eléctrico en un punto determinado es la energía potencial que estaría asociada con una carga *unitaria* situada en ese punto. Ésta es la razón por la que el potencial se mide en joules por coulomb, o volts. Tenga presente, además, que no es necesario que haya una carga en un punto dado para que exista un potencial  $V$  en ese punto. (De igual modo, un campo eléctrico puede existir en un punto dado aunque no haya una carga ahí que responda al campo).



## 11.13 Energía potencial eléctrica y potencial

Cuando se tiene un conjunto de cargas puntuales, la ecuación (23.15) es ordinariamente el medio más fácil para calcular el potencial  $V$ . Pero en ciertos problemas en los que se conoce el campo eléctrico o se puede hallar sin dificultad, es más fácil determinar  $V$  a partir de  $\vec{E}$ . La fuerza  $\vec{F}$  sobre una carga de prueba  $q_0$  se puede escribir como  $\vec{F} = q_0\vec{E}$ , así que, según la ecuación (23.1), el trabajo realizado por la fuerza eléctrica cuando la carga de prueba se desplaza de  $a$  a  $b$  está dado por

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se divide esto entre  $q_0$  y se compara el resultado con la ecuación (23.13), resulta que

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos \phi \, dl \quad (23.17)$$

(diferencia de potencial como una integral de  $\vec{E}$ )

El valor de  $V_a - V_b$  es independiente de la trayectoria seguida para ir de  $a$  a  $b$ , del mismo modo que  $W_{a \rightarrow b}$  es independiente de la trayectoria. Para interpretar la ecuación (23.17), recuérdese que  $\vec{E}$  es la fuerza eléctrica por unidad de carga sobre una carga de prueba. Si la integral de línea  $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$  es positiva, el campo eléctrico realiza trabajo positivo sobre una carga positiva de prueba conforme ésta se desplaza de  $a$  a  $b$ . En este caso la energía potencial eléctrica disminuye a medida que la carga de prueba se desplaza, por lo que la energía potencial por unidad de carga también disminuye; por tanto,  $V_b$  es menor que  $V_a$  y  $V_a - V_b$  es positiva.

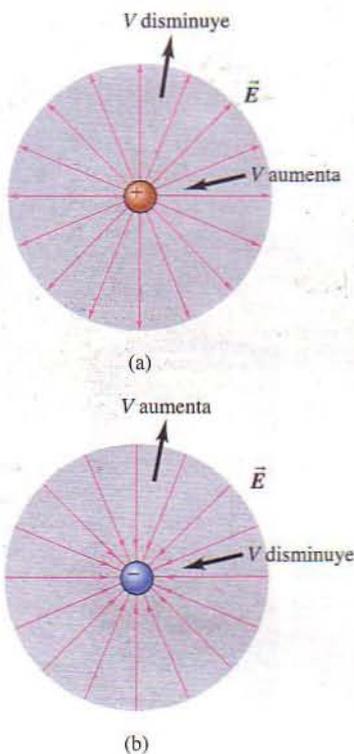
La figura 23.11a muestra una carga puntual positiva. La dirección del campo eléctrico se aleja de la carga y  $V = q/4\pi\epsilon_0 r$  es positivo a cualquier distancia finita de ésta. Si nos alejamos de la carga, en la dirección de  $\vec{E}$ , nos desplazamos hacia valores más pequeños de  $V$ ; si nos acercamos a la carga, en la dirección opuesta a  $\vec{E}$ , avanzamos hacia valores más grandes de  $V$ . En el caso de la carga puntual negativa de la figura 23.11b,  $\vec{E}$  está dirigido hacia la carga y  $V = q/4\pi\epsilon_0 r$  es negativo a cualquier distancia finita de ésta. En este caso, si nos desplazamos hacia la carga, lo hacemos en la dirección de  $\vec{E}$  y en la dirección de  $V$  decreciente (más negativo). Al alejarnos de la carga, en la dirección opuesta a  $\vec{E}$ , nos desplazamos hacia valores crecientes (menos negativos) de  $V$ . La regla general, válida para *cualquier* campo eléctrico, es: desplazarse *en* la dirección de  $\vec{E}$  significa avanzar en la dirección de  $V$  decreciente, y desplazarse *contra* la dirección de  $\vec{E}$  significa avanzar en la dirección de  $V$  creciente.

Además, una carga positiva de prueba  $q_0$  experimenta una fuerza eléctrica en la dirección de  $\vec{E}$  hacia valores más pequeños de  $V$ ; una carga negativa de prueba experimenta una fuerza opuesta a  $\vec{E}$ , hacia valores más grandes de  $V$ . De esta manera, una carga positiva tiende a “caer” de una región de potencial elevado a una de potencial más bajo. Sucede lo contrario con una carga negativa.

Dese cuenta que la ecuación (23.17) se puede escribir también como sigue:

$$V_a - V_b = - \int_b^a \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (23.18)$$

Ésta tiene un signo negativo en comparación con la integral de la ecuación (23.17) y los límites están invertidos; por tanto, las ecuaciones (23.17) y (23.18) son equivalentes. Pero la ecuación (23.18) tiene una interpretación un poco diferente. Para desplazar lentamente una carga unitaria contra la fuerza eléctrica, es preciso aplicar una fuerza *externa* por unidad de carga igual a  $-\vec{E}$ , igual y opuesta a la fuerza eléctrica por unidad de carga  $\vec{E}$ . La ecuación (23.18) afirma que  $V_a - V_b = V_{ab}$ , el potencial de



**23.11** (a) Carga puntual positiva. (b) Carga puntual negativa. En ambos casos, al desplazarse en la dirección de  $\vec{E}$ , el potencial eléctrico  $V$  disminuye; al desplazarse en dirección opuesta a  $\vec{E}$ ,  $V$  aumenta.

$a$  con respecto a  $b$ , es igual al trabajo por unidad de carga realizado por esta fuerza externa para desplazar una carga unitaria de  $b$  a  $a$ . Ésta es la misma interpretación diferente que comentamos con respecto a la ecuación (23.13).

Las ecuaciones (23.17) y (23.18) muestran que la unidad de diferencia de potencial (1 V) es igual a la unidad de campo eléctrico (1 N/C) multiplicada por la unidad de distancia (1 m). Por tanto, la unidad de campo eléctrico se puede expresar como 1 volt por metro (1 V/m) o como 1 N/C:

$$1 \text{ V/m} = 1 \text{ volt/metro} = 1 \text{ N/C} = 1 \text{ newton/coulomb}$$

En la práctica, la unidad usual de magnitud de campo eléctrico es el volt por metro.

La magnitud  $e$  de la carga del electrón permite definir una unidad de energía que resulta útil en muchos cálculos de sistemas atómicos y nucleares. Cuando una partícula con carga  $q$  se desplaza de un punto donde el potencial es  $V_b$  a un punto donde es  $V_a$ , el cambio de energía potencial  $U$  es

$$U_a - U_b = q(V_a - V_b) = qV_{ab}$$

Si la carga  $q$  es igual a la magnitud  $e$  de la carga del electrón,  $1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , y la diferencia de potencial es  $V_{ab} = 1 \text{ V}$ , el cambio de energía es

$$U_a - U_b = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ V}) = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

Esta cantidad de energía se define como 1 **electrón volt** (1 eV):

$$1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$$

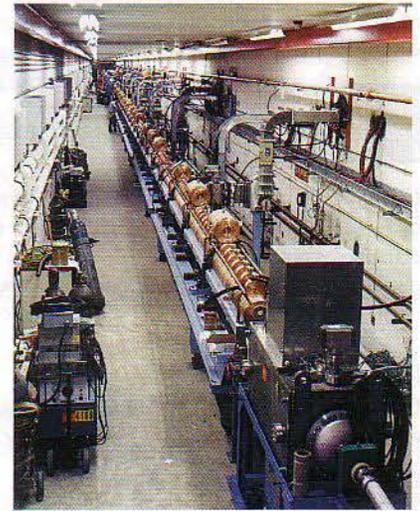
Es frecuente el uso de los múltiplos meV, keV, MeV, GeV y TeV.

**CUIDADO** Recuerde que el electrón volt es una unidad de energía, *¡no* una unidad de potencial ni de diferencia de potencial!

Cuando una partícula con carga  $e$  se desplaza a través de una diferencia de potencial de un volt, el cambio de *energía* potencial es de 1 eV. Si la carga es algún múltiplo de  $e$ , por ejemplo,  $Ne$ , el cambio de energía potencial en electrón volt es  $N$  veces la diferencia de potencial en volt. Por ejemplo, cuando una partícula alfa, cuya carga es  $2e$ , se desplaza entre dos puntos con una diferencia de potencial de 1000 V, el cambio de energía potencial es de  $2(1000 \text{ eV}) = 2000 \text{ eV}$ . Para confirmar esto escribimos

$$\begin{aligned} U_a - U_b &= qV_{ab} = (2e)(1000 \text{ V}) = (2)(1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1000 \text{ V}) \\ &= 3.204 \times 10^{-16} \text{ J} = 2000 \text{ eV} \end{aligned}$$

Aunque hemos definido el electrón volt en términos de energía *potencial*, se puede usar con *cualquier* forma de energía, como la energía cinética de una partícula en movimiento. Cuando hablamos de un "protón de un millón de electrón volt", nos referimos a un protón con una energía cinética de un millón de electrón volts (1 MeV), igual a  $(10^6)(1.602 \times 10^{-19} \text{ J}) = 1.602 \times 10^{-13} \text{ J}$  (Fig. 23.12).



**23.12** Este acelerador del Fermi National Accelerator Laboratory en Illinois, imparte a los protones una energía cinética de 400 MeV ( $4 \times 10^8 \text{ eV}$ ). Etapas adicionales de aceleración aumentan su energía cinética a 980 GeV, o 0.98 TeV ( $9.8 \times 10^{11} \text{ eV}$ ).

### Ejemplo 23.3

## Fuerza eléctrica y potencial eléctrico

Un protón (carga  $+e = 1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ ) se desplaza en línea recta del punto  $a$  al punto  $b$  dentro de un acelerador lineal, una distancia total  $d = 0.50 \text{ m}$ . El campo eléctrico es uniforme a lo largo de esta línea y su magnitud es  $E = 1.5 \times 10^7 \text{ V/m} = 1.5 \times 10^7 \text{ N/C}$  en la dirección desde  $a$  a  $b$ . Halle a) la fuerza sobre el protón; b) el trabajo que el campo realiza sobre él; c) La diferencia de potencial  $V_a - V_b$ .

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Se proporciona el campo eléctrico; por tanto, es sencillo hallar la fuerza sobre el protón. Además, es sencillo calcular el trabajo realizado por esta fuerza sobre el protón porque  $\vec{E}$  es uniforme, lo que significa que la fuerza es constante.

Una vez conocido el trabajo, se halla la diferencia de potencial mediante la ecuación (23.13).

**EJECUTAR:** a) La fuerza tiene la misma dirección que el campo eléctrico y su magnitud es

$$F = qE = (1.602 \times 10^{-19} \text{ C})(1.5 \times 10^7 \text{ N/C}) \\ = 2.4 \times 10^{-12} \text{ N}$$

b) La fuerza es constante y tiene la misma dirección que el desplazamiento; por tanto, el trabajo realizado es

$$W_{a \rightarrow b} = Fd = (2.4 \times 10^{-12} \text{ N})(0.50 \text{ m}) = 1.2 \times 10^{-12} \text{ J} \\ = (1.2 \times 10^{-12} \text{ J}) \frac{1 \text{ eV}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ J}} \\ = 7.5 \times 10^6 \text{ eV} = 7.5 \text{ MeV}$$

c) Según la ecuación (23.13), la diferencia de potencial es el trabajo por unidad de carga, que es

$$V_a - V_b = \frac{W_{a \rightarrow b}}{q} = \frac{1.2 \times 10^{-12} \text{ J}}{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}} = 7.5 \times 10^6 \text{ J/C} \\ = 7.5 \times 10^6 \text{ V} = 7.5 \text{ MV}$$

Este resultado se obtiene incluso de manera más fácil recordando que un electrón volt es igual a un volt multiplicado por la carga  $e$ . Dado que el trabajo realizado es de  $7.5 \times 10^6 \text{ eV}$  y la carga es  $e$ , la diferencia de potencial es  $(7.5 \times 10^6 \text{ eV})/e = 7.5 \times 10^6 \text{ V}$ .

**EVALUAR:** El resultado del inciso (c) se comprueba calculando una integral del campo eléctrico mediante las ecuaciones (23.17) o (23.18). El ángulo  $\phi$  entre el campo constante  $\vec{E}$  y el desplazamiento es cero; por tanto, la ecuación (23.17) se transforma en

$$V_a - V_b = \int_a^b E \cos \phi \, dl = \int_a^b E \, dl = E \int_a^b dl$$

La integral de  $dl$  desde  $a$  hasta  $b$  es simplemente la distancia  $d$ , por lo que se obtiene una vez más

$$V_a - V_b = Ed = (1.5 \times 10^7 \text{ V/m})(0.50 \text{ m}) = 7.5 \times 10^6 \text{ V}$$

### Ejemplo 23.4

## Potencial debido a dos cargas puntuales

Un dipolo eléctrico consta de dos cargas puntuales,  $q_1 = +12 \text{ nC}$  y  $q_2 = -12 \text{ nC}$ , separadas por una distancia de  $10 \text{ cm}$  (Fig. 23.13). Calcule los potenciales en los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  sumando los potenciales debidos a una u otra carga, como en la ecuación (23.15).

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Este ordenamiento de cargas es mismo del ejemplo 21.9 (sección 21.5). En ese ejemplo calculamos el campo eléctrico en cada punto efectuando una suma vectorial. En este caso calcularemos el potencial eléctrico en cada punto efectuando la suma algebraica de la ecuación (23.15):

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

**EJECUTAR:** En el punto  $a$  el potencial debido a la carga positiva  $q_1$  es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.060 \text{ m}} \\ = 1800 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{C} \\ = 1800 \text{ J/C} = 1800 \text{ V}$$

y el potencial debido a la carga negativa  $q_2$  es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \frac{(-12 \times 10^{-9} \text{ C})}{0.040 \text{ m}} \\ = -2700 \text{ N}\cdot\text{m}/\text{C} \\ = -2700 \text{ J/C} = -2700 \text{ V}$$

El potencial  $V_a$  en el punto  $a$  es la suma de éstos:

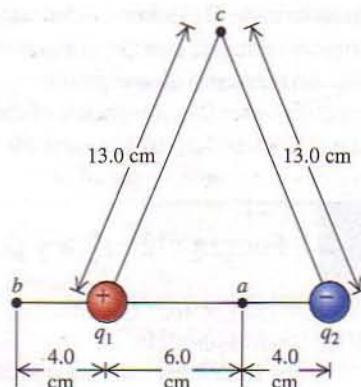
$$V_a = 1800 \text{ V} + (-2700 \text{ V}) = -900 \text{ V}$$

Mediante cálculos similares se puede demostrar que en el punto  $b$  el potencial debido a la carga positiva es de  $+2700 \text{ V}$ , el potencial debido a la carga negativa es de  $-770 \text{ V}$  y

$$V_b = 2700 \text{ V} + (-770 \text{ V}) = 1930 \text{ V}$$

En el punto  $c$  el potencial debido a la carga positiva es

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1} = (9.0 \times 10^9 \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{C}^2) \frac{12 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.13 \text{ m}} = 830 \text{ V}$$



**23.13** ¿Cuáles son los potenciales en los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  debidos a este dipolo eléctrico?

El potencial debido a la carga negativa es de  $-830 \text{ V}$ , y el potencial total es cero:

$$V_c = 830 \text{ V} + (-830 \text{ V}) = 0$$

El potencial también es igual a cero en el infinito (infinitamente lejos de las dos cargas).

**EVALUAR:** La comparación de este ejemplo con el 21.9 muestra que es mucho más fácil calcular el potencial eléctrico (un escalar) que el campo eléctrico (un vector). Aprovecharemos esta simplificación siempre que sea posible.

### Ejemplo 23.5

## Potencial y energía potencial

Calcule la energía potencial asociada con una carga puntual de  $+4.0 \text{ nC}$  si ésta se encuentra en los puntos  $a$ ,  $b$  y  $c$  de la figura 23.13.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Con respecto a cualquier carga puntual  $q$ , la energía potencial asociada es  $U = qV$ . Se emplean los valores de  $V$  del ejemplo 23.4.

**EJECUTAR:** En el punto  $a$ ,

$$U_a = qV_a = (4.0 \times 10^{-9} \text{ C})(-900 \text{ J/C}) = -3.6 \times 10^{-6} \text{ J}$$

En el punto  $b$ ,

$$U_b = qV_b = (4.0 \times 10^{-9} \text{ C})(1930 \text{ J/C}) = 7.7 \times 10^{-6} \text{ J}$$

En el punto  $c$ ,

$$U_c = qV_c = 0$$

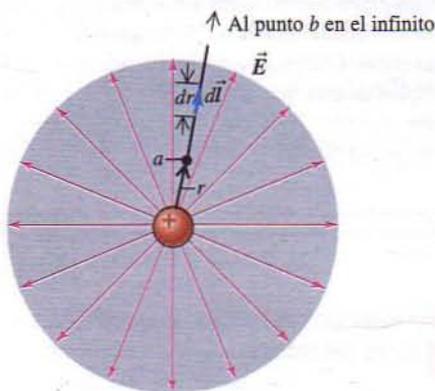
Todos estos valores corresponden a que  $U$  y  $V$  son cero en el infinito.

**EVALUAR:** Dese cuenta que *no* se realiza trabajo neto alguno sobre la carga de  $4.0 \text{ nC}$  cuando ésta se desplaza del punto  $c$  al infinito por cualquier trayectoria. En particular, sea una trayectoria a lo largo de la bisectriz perpendicular de la línea que une las otras dos cargas  $q_1$  y  $q_2$  en la figura 23.13. Como se muestra en el ejemplo 21.9 (sección. 21.5), en los puntos sobre la bisectriz la dirección de  $\vec{E}$  es perpendicular a la bisectriz. Por tanto, la fuerza sobre la carga de  $4.0 \text{ nC}$  es perpendicular a la trayectoria y no se realiza trabajo alguno en cualquier desplazamiento a lo largo de ella.

### Ejemplo 23.6

## Cómo hallar el potencial por integración

Integrando el campo eléctrico como en la ecuación (23.17), halle el potencial a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$ .



**23.14** Cómo calcular el potencial integrando  $\vec{E}$  con respecto a una sola carga puntual.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Para hallar el potencial  $V$  a una distancia  $r$  de la carga puntual, fijamos el punto  $a$  de la ecuación (23.17) a la distancia  $r$  y el punto  $b$  en el infinito (Fig. 23.14). Como de costumbre, elegimos que el potencial sea cero a una distancia infinita de la carga.

**EJECUTAR:** Para llevar a cabo la integral, podemos elegir cualquier camino entre los puntos  $a$  y  $b$ . El más conveniente es una línea recta radial como se muestra en la figura 23.14, de tal modo que  $d\vec{l}$  está en la dirección radial y su magnitud es  $dr$ . Si  $q$  es positiva,  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  son siempre paralelos; por tanto,  $\phi = 0$  y la ecuación (23.17) se transforma en

$$\begin{aligned} V - 0 &= \int_r^\infty E dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \Big|_r^\infty = 0 - \left( -\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \\ V &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

Esto concuerda con la ecuación (23.14). Si  $q$  es negativa,  $\vec{E}$  es radialmente hacia adentro en tanto que  $d\vec{l}$  sigue siendo radialmente

hacia afuera; así que  $\phi = 180^\circ$ . Puesto que  $\cos 180^\circ = -1$ , esto agrega un signo menos al resultado anterior. De cualquier manera, la magnitud del campo  $E$  siempre es positiva, y dado que  $q$  es negativa, debemos escribir  $E = |q|/4\pi\epsilon_0 r^2 = -q/4\pi\epsilon_0 r^2$ , lo que da otro signo menos. Los dos signos menos se cancelan y el resultado anterior de  $V$  es válido con respecto a cargas puntuales de uno u otro signo.

**EVALUAR:** Se obtiene el mismo resultado mediante la ecuación (23.7) del campo eléctrico, que es válida con cualquier signo de  $q$ , y escribiendo  $d\vec{l} = \hat{r} dr$ :

$$V - 0 = V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} dr = \int_r^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr$$

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

### Ejemplo 23.7

## Traslado a través de una diferencia de potencial

En la figura 23.15 una partícula de polvo de masa  $m = 5.0 \times 10^{-9}$  kg y carga  $q_0 = 2.0$  nC inicialmente desde el reposo en el punto  $a$  y se traslada en línea recta al punto  $b$ . ¿Cuál es su rapidez  $v$  en el punto  $b$ ?

### SOLUCIÓN

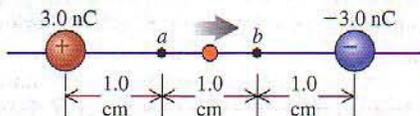
**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Este problema sería difícil de resolver sin utilizar técnicas de energía, pues la magnitud de la fuerza que actúa sobre la partícula varía a medida que la partícula se traslada de  $a$  a  $b$ . Sólo la fuerza eléctrica conservativa actúa sobre la partícula; de esa manera, la energía mecánica se conserva:

$$K_a + U_a = K_b + U_b$$

**EJECUTAR:** En esta situación,  $K_a = 0$  y  $K_b = \frac{1}{2}mv^2$ . Las energías potenciales ( $U$ ) se obtienen de los potenciales ( $V$ ) mediante la ecuación (23.12):  $U_a = q_0V_a$  y  $U_b = q_0V_b$ . Sustituyendo éstas en la ecuación de conservación de la energía y resolviendo para  $v$  encontramos que

$$0 + q_0V_a = \frac{1}{2}mv^2 + q_0V_b$$

$$v = \sqrt{\frac{2q_0(V_a - V_b)}{m}}$$



**23.15** La partícula se desplaza del punto  $a$  al punto  $b$ ; su aceleración no es constante.

Los potenciales se calculan por medio de la ecuación (23.15), tal como se hizo en el ejemplo 23.4:

$$V_a = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \times \left( \frac{3.0 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.010 \text{ m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0.020 \text{ m}} \right) = 1350 \text{ V}$$

$$V_b = (9.0 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2) \times \left( \frac{3.0 \times 10^{-9} \text{ C}}{0.020 \text{ m}} + \frac{(-3.0 \times 10^{-9} \text{ C})}{0.010 \text{ m}} \right) = -1350 \text{ V}$$

$$V_a - V_b = (1350 \text{ V}) - (-1350 \text{ V}) = 2700 \text{ V}$$

Por último,

$$v = \sqrt{\frac{2(2.0 \times 10^{-9} \text{ C})(2700 \text{ V})}{5.0 \times 10^{-9} \text{ kg}}} = 46 \text{ m/s}$$

**EVALUAR:** Nuestro resultado es razonable: la carga positiva de prueba gana rapidez conforme se traslada alejándose de la carga positiva y se acerca a la carga negativa. Para verificar la congruencia de unidades en el renglón final del cálculo, adviértase que  $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ , por lo que el numerador bajo el radical tiene unidades de  $\text{J} \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2$ .

Se puede aplicar exactamente este mismo método para hallar la rapidez de un electrón acelerado a través de una diferencia de potencial de 500 V en un tubo de osciloscopio o 20 kV en un cinescopio de televisión. Los problemas del final del capítulo incluyen varios ejemplos de este tipo de cálculos.

### Evalúe su comprensión

Si el potencial eléctrico en cierto punto es cero, ¿debe ser igual a cero el campo eléctrico en ese punto? (Sugerencia: Considere el punto  $c$  de los ejemplos 23.4 y 21.9).

## 23.3 | Cálculo del potencial eléctrico

Cuando se calcula el potencial debido a una distribución de carga, por lo regular se sigue una de dos rutas. Si se conoce la distribución de carga, se usa la ecuación (23.15) o (23.16). O bien, si se sabe cómo depende el campo eléctrico de la posición, se puede emplear la ecuación (23.17), que define el potencial como cero en algún lugar conveniente. Algunos problemas requieren una combinación de estos métodos.

Al leer con detenimiento estos ejemplos, compárelos con los ejemplos afines del cálculo del *campo* eléctrico de la sección 21.5. Verá cuánto más fácil es calcular potenciales eléctricos escalares que campos eléctricos vectoriales. La enseñanza es clara: siempre que sea posible, resuelva los problemas utilizando una aproximación de energía (usando potencial eléctrico y energía potencial eléctrica) en vez de un método dinámico (empleando campos eléctricos y fuerzas eléctricas).

Estrategia para  
resolver problemas

### Cálculo del potencial eléctrico

**IDENTIFICAR** *los conceptos pertinentes:* Recuerde que el potencial es *energía potencial por unidad de carga*. Interpretar esta aseveración ya es un gran avance.

**PLANTEAR** *el problema siguiendo estos pasos:*

1. Haga un dibujo que muestre con claridad la ubicación de las cargas (que pueden ser cargas puntuales o una distribución continua de carga) y los ejes de coordenadas elegidos.
2. Indique en su dibujo la posición del punto en el que se propone calcular el potencial eléctrico  $V$ . A veces esta posición será arbitraria (por ejemplo, un punto a una distancia  $r$  del centro de una esfera con carga).

**EJECUTAR** *la solución como sigue:*

1. Para hallar el potencial debido a un conjunto de cargas puntuales, use la ecuación (23.15). Si se trata de una distribución continua de carga, idee una manera de dividirla en elementos infinitesimales y luego utilice la ecuación (23.16). Lleva a cabo la integración con los límites apropiados para incluir toda la distribución de carga. En la integral, sea cuidadoso sobre cuáles cantidades geométricas varían y cuáles se mantienen constantes.
2. Si se le da el campo eléctrico, o si puede hallarlo mediante cualquiera de los métodos presentados en los capítulos 21 o 22, puede ser más fácil utilizar la ecuación (23.17) o

(23.18) para calcular la diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $b$ . Cuando sea apropiado, ejercite su libertad para definir  $V$  como cero en algún lugar conveniente y elija que este lugar sea el punto  $b$ . (En el caso de cargas puntuales, por lo regular estará en el infinito. Tratándose de otras distribuciones de carga, en especial de aquellas que se extienden por sí mismas hasta el infinito, puede ser conveniente o necesario definir  $V_b$  como cero a cierta distancia finita de la distribución de carga. Esto es lo mismo que definir  $U$  como cero en el nivel del suelo en los problemas gravitatorios). En estas condiciones el potencial en cualquier otro punto, por ejemplo,  $a$ , puede hallarse a partir de la ecuación (23.17) o (23.18) con  $V_b = 0$ .

3. Recuerde que el potencial es una cantidad *escalar*, no un *vector*. ¡No tiene componentes! No obstante, es posible que deba usar componentes de los vectores  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  al utilizar la ecuación (23.17) o (23.18).

**EVALUAR** *la respuesta:* Compruebe que su respuesta concuerde con su intuición. Si su resultado da  $V$  en función de la posición, haga una gráfica de esta función para ver si tiene sentido. Si conoce el campo eléctrico, puede hacer una comprobación aproximada de su resultado de  $V$  verificando que  $V$  disminuye si se traslada en la dirección de  $\vec{E}$ .

Ejemplo  
23.8

### Esfera conductora con carga

Una esfera conductora sólida de radio  $R$  tiene una carga total  $q$ . Halle el potencial en todas partes, tanto afuera como adentro de la esfera.

#### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** En el ejemplo 22.5 (sección 22.4) aplicamos la ley de Gauss para hallar el campo eléctrico en todos

los puntos de esta distribución de carga. Haremos uso de ese resultado para determinar  $V$  en todos los puntos.

**EJECUTAR:** De acuerdo con el ejemplo 22.5, en todos los puntos *afuera* de la esfera el campo es el mismo que si se quitase la esfera y se sustituyese por una carga puntual  $q$ . Considere  $V = 0$  en el in-

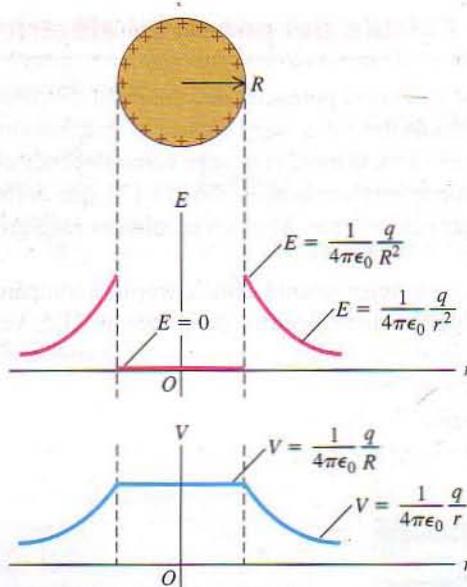
finito, como se hizo en el caso de una carga puntual. Por lo tanto, el potencial en un punto situado afuera de la esfera a una distancia  $r$  de su centro es el mismo que el potencial debido a una carga puntual  $q$  en el centro:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$$

El potencial en la superficie de la esfera es  $V_{\text{superficie}} = q/4\pi\epsilon_0 R$ .

Adentro de la esfera,  $\vec{E}$  es cero en todas partes; si no fuera así, la carga se desplazaría dentro de la esfera. Por tanto, si una carga de prueba se traslada de cualquier punto a cualquier otro punto del interior de la esfera, no se realiza trabajo alguno sobre esa carga. Esto significa que el potencial es el mismo en todos los puntos del interior de la esfera y es igual a su valor  $q/4\pi\epsilon_0 R$  en la superficie.

**EVALUAR:** La figura 23.16 muestra el campo y el potencial en función de  $r$  correspondientes a una carga positiva  $q$ . En este caso el campo eléctrico apunta radialmente alejándose de la esfera. Conforme nos alejamos de la esfera, en la dirección de  $\vec{E}$ ,  $V$  disminuye (como debe ser). La magnitud del campo eléctrico en la superficie es  $E_{\text{superficie}} = |q|/4\pi\epsilon_0 R^2$ .



23.16 Magnitud del campo eléctrico  $E$  y potencial  $V$  en puntos situados adentro y afuera de un conductor esférico con carga positiva.

### Ionización y descarga en corona

Los resultados del ejemplo 23.8 tienen numerosas consecuencias prácticas. Una de ellas tiene que ver con el potencial máximo al que se puede elevar un conductor en presencia de aire. Este potencial tiene un límite porque las moléculas de aire se *ionizan* y el aire se convierte en conductor a una magnitud de campo eléctrico aproximado de  $3 \times 10^6$  V/m. De momento suponga que  $q$  es positiva. Cuando se comparan las expresiones del ejemplo 23.8 en términos del potencial  $V_{\text{superficie}}$  y la magnitud del campo  $E_{\text{superficie}}$  en la superficie de una esfera conductora con carga, se advierte que  $V_{\text{superficie}} = E_{\text{superficie}} R$ . De este modo, si  $E_m$  representa la magnitud del campo eléctrico a la que el aire se torna conductor (conocida como la *resistencia dieléctrica* del aire), entonces el potencial máximo  $V_m$  al que se puede elevar un conductor esférico es

$$V_m = RE_m$$

En el caso de una esfera conductora de 1 cm de radio en el aire,  $V_m = (10^{-2} \text{ m})(3 \times 10^6 \text{ V/m}) = 30\,000 \text{ V}$ . Por más que se "cargue" una esfera conductora de este tamaño en presencia de aire, no se puede elevar su potencial a más de aproximadamente 30 000 V; si se intenta elevar más aún el potencial agregando carga adicional, el aire circundante se ioniza y se hace conductor y la carga adicional agregada se fuga hacia el aire.

A fin de alcanzar potenciales aún mayores, las máquinas de alto voltaje como los generadores Van de Graaff utilizan bornes esféricos de radios muy grandes (véase la figura 22.28 y la fotografía inicial del capítulo 22). Por ejemplo, un borne de radio  $R = 2 \text{ m}$  tiene un potencial máximo  $V_m = (2 \text{ m})(3 \times 10^6 \text{ V/m}) = 6 \times 10^6 \text{ V} = 6 \text{ MV}$ . En ciertos casos las máquinas de este tipo se colocan en tanques a presión llenos de un gas como el hexafluoruro de azufre ( $\text{SF}_6$ ), que tiene un valor de  $E_m$  más grande que el aire y, en consecuencia, soporta campos aún mayores sin hacerse conductor.

Nuestro resultado del ejemplo 23.8 explica también lo que ocurre con un conductor con carga que tiene un radio de curvatura muy *pequeño*, como una punta afilada o un alambre fino. Debido a que el potencial máximo es proporcional al radio, incluso potenciales relativamente pequeños aplicados a puntas agudas en el aire producen campos lo bastante grandes, inmediatamente afuera de la punta, para ionizar el aire circundante y convertirlo en conductor. La corriente resultante y el resplandor asociado a ella (visible en una habitación a oscuras) reciben el nombre de *corona*.

Las impresoras láser y las máquinas fotocopiadoras utilizan la corona de alambres finos para rociar carga sobre el tambor formador de imágenes (véase la Fig. 21.2). En una escala mayor, los pararrayos tienen una punta aguda para que los rayos recorran en el aire un camino conductor que lleve hacia el pararrayos y no a otras estructuras cercanas que podrían sufrir daños (Fig. 23.17). A fin de impedir que la carga adquirida por el pararrayos entre en el edificio, un cable conductor enlaza el pararrayos con la tierra. Las antenas de radio de automóvil tienen una esfera en la punta que ayuda a *prevenir* la corona que provocaría estática.



**23.17** El mástil metálico de la parte más alta del edificio Empire State actúa como pararrayos. Recibe descargas de rayos hasta 500 veces al año.

### Ejemplo 23.9

## Placas paralelas con carga opuesta

Halle el potencial a cualquier altura  $y$  entre las dos placas paralelas con carga opuesta analizadas en la sección 23.1.

### SOLUCIÓN

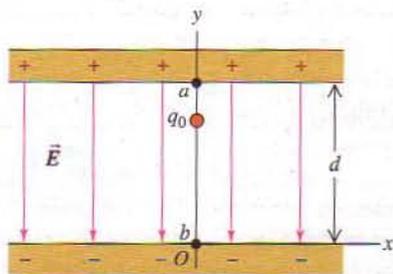
**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** La energía potencial  $U$  de una carga de prueba  $q_0$  en un punto a una distancia  $y$  arriba de la placa inferior (Fig. 23.18) está dada por la ecuación (23.5):  $U = q_0Ey$ . Se utiliza esta expresión para hallar el potencial  $V$  en el punto descrito.

**EJECUTAR:** El potencial  $V(y)$  en la coordenada  $y$  es la energía potencial por unidad de carga:

$$V(y) = \frac{U(y)}{q_0} = \frac{q_0Ey}{q_0} = Ey$$

Hemos elegido  $U(y)$  y, por tanto,  $V(y)$  como cero en el punto  $b$ , donde  $y = 0$ . Incluso si se elige un potencial diferente de cero en  $b$ , se sigue cumpliendo que

$$V(y) - V_b = Ey$$



**23.18** Las placas paralelas con carga de la figura 23.1.

El potencial disminuye al descender de la placa superior a la inferior en la dirección de  $\vec{E}$ . En el punto  $a$ , donde  $y = d$  y  $V(y) = V_a$ ,

$$V_a - V_b = Ed \quad \text{y} \quad E = \frac{V_a - V_b}{d} = \frac{V_{ab}}{d}$$

donde  $V_{ab}$  es el potencial de la placa positiva con respecto a la placa negativa. Es decir, el campo eléctrico es igual a la diferencia de potencial entre las placas dividida entre la distancia que las separa. (Esta relación entre  $E$  y  $V_{ab}$  es válida *sólo* en el caso de la geometría plana que hemos descrito. No funciona en situaciones como las de cilindros o esferas concéntricas, donde el campo eléctrico no es uniforme).

**EVALUAR:** Nuestro resultado ofrece un medio práctico para medir la densidad de carga de las cargas de las dos placas de la figura 23.18. En el ejemplo 22.8 (sección 22.4) dedujimos la expresión  $E = \sigma/\epsilon_0$  del campo eléctrico  $E$  entre dos placas conductoras con densidades superficiales de carga  $+\sigma$  y  $-\sigma$ , respectivamente. Igualando esta expresión con  $E = V_{ab}/d$  se obtiene

$$\sigma = \frac{\epsilon_0 V_{ab}}{d}$$

La densidad de carga superficial de la placa positiva es directamente proporcional a la diferencia de potencial entre las placas, y se halla su valor  $\sigma$  midiendo  $V_{ab}$ . Esta técnica es útil porque no se dispone de instrumentos capaces de medir directamente la densidad superficial de carga. En la placa negativa la densidad superficial de carga es  $-\sigma$ .

**CAUIDADO** Se podría pensar que si un cuerpo conductor tiene un potencial de cero, necesariamente debe tener también una carga neta de cero. ¡Pero simplemente no es así! Por ejemplo, la placa que está en  $y = 0$  en la figura 23.18 tiene potencial cero ( $V = 0$ ), pero tiene una carga por unidad de área  $-\sigma$  diferente de cero. Recuerde que nada tiene de especial el lugar donde el potencial es cero; podemos *definir* la ubicación de este lugar donde queramos.

Ejemplo  
23.10

## Una línea de carga infinita o un cilindro conductor con carga

Halle el potencial a una distancia  $r$  de una línea de carga muy larga con densidad de carga lineal (carga por unidad de longitud)  $\lambda$ .

## SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Un planteamiento a este problema consiste en dividir la línea de carga en elementos infinitesimales, como se hizo en el ejemplo 21.11 (sección 21.5) para hallar el campo eléctrico producido por esa línea. En estas condiciones se pudo integrar como en la ecuación (23.16) para hallar el potencial neto  $V$ .

De cualquier modo, en este caso la tarea se simplifica enormemente porque ya se conoce el campo eléctrico. Tanto en el ejemplo 21.11 como en el 22.6 (sección 22.4) hallamos que el campo eléctrico a una distancia  $r$  desde una carga rectilínea larga (Fig. 23.19a) tiene sólo una componente radial, dada por

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

Utilizaremos esta expresión para hallar el potencial integrando  $\vec{E}$  como en la ecuación (23.17).

**EJECUTAR:** Puesto que el campo tiene sólo una componente radial, el producto escalar  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  es igual a  $E_r dr$ . Por consiguiente, el potencial de cualquier punto  $a$  con respecto a cualquier otro punto  $b$ , a distancias radiales  $r_a$  y  $r_b$  desde la línea de carga, es

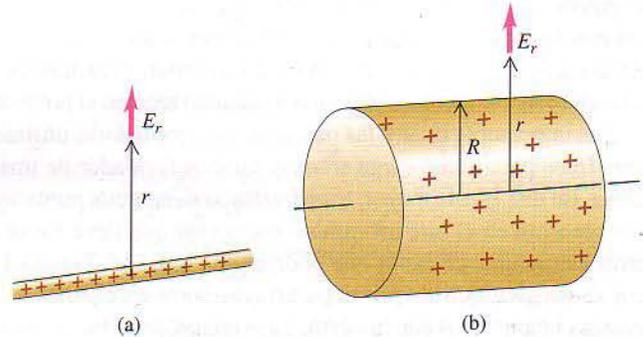
$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_a}^{r_b} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_b}{r_a}$$

Si se supone que el punto  $b$  está en el infinito y se fija  $V_b = 0$ , se halla que  $V_a$  es infinito:

$$V_a = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\infty}{r_a} = \infty$$

Esto demuestra que si se intenta definir  $V$  como cero en el infinito, entonces  $V$  debe ser infinito a cualquier distancia finita de la línea de carga. Así pues, ¡ésta no es una manera útil de definir  $V$  en este problema! La dificultad, como ya mencionamos, es que la distribución misma de carga se extiende hasta el infinito.

Para evitar esta dificultad, recuerde que podemos definir  $V$  como cero en el punto que deseemos. Fijemos  $V_b = 0$  en el punto  $b$  a una



23.19 Campo eléctrico fuera (a) de un alambre largo con carga positiva; (b) de un cilindro largo con carga positiva.

distancia radial arbitraria  $r_0$ . Entonces el potencial  $V = V_a$  en el punto  $a$  a una distancia radial  $r$  está dado por  $V - 0 = (\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln(r_0/r)$ , o

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

**EVALUAR:** De acuerdo con nuestro resultado, si  $\lambda$  es positiva entonces  $V$  disminuye conforme  $r$  aumenta. Así es como debe ser:  $V$  disminuye conforme se traslada en la dirección de  $\vec{E}$ .

De acuerdo con el ejemplo 22.6, la expresión de  $E_r$  de la que partimos también es aplicable afuera de un cilindro conductor largo con carga por unidad de longitud  $\lambda$  (Fig. 23.19b). Por tanto, nuestro resultado también da el potencial en el campo con respecto a un cilindro de este tipo, pero sólo con respecto a valores de  $r$  iguales o mayores que el radio  $R$  del cilindro. Si tomamos  $r_0$  como el radio  $R$  del cilindro, de modo que  $V = 0$  cuando  $r = R$ , entonces en cualquier punto donde  $r > R$

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

donde  $r$  es la distancia al eje del cilindro. En el interior del cilindro  $\vec{E} = 0$ , y  $V$  tiene el mismo valor (cero) que en la superficie del cilindro.

Ejemplo  
23.11

## Anillo de carga

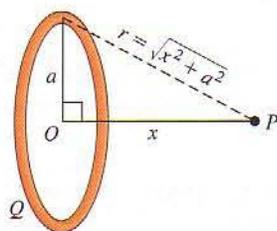
Se tiene carga eléctrica distribuida uniformemente en torno a un anillo delgado de radio  $a$ , con una carga total  $Q$  (Fig. 23.20). Halle el potencial en un punto  $P$  sobre el eje del anillo a una distancia  $x$  del centro del anillo.

## SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Este problema se podría resolver por el mismo planteamiento que en el ejemplo precedente: en el ejemplo 21.10 (sección 21.5) se halló el campo eléctrico en todos los puntos

a lo largo del eje de las  $x$ ; por tanto, se podría integrar  $\vec{E}$  como en la ecuación (23.17) para hallar  $V$  a lo largo de este eje. De cualquier modo, en este caso es mucho más fácil hallar  $V$  integrando con respecto a la distribución de carga como en la ecuación (23.16), porque todas las partes del anillo (esto es, todos los elementos de la distribución de carga) están a la misma distancia  $r$  desde el punto  $P$ .

**EJECUTAR:** Se divide el anillo en elementos infinitesimales de carga  $dq$ . La figura 23.20 muestra que la distancia de cada uno de es-



**23.20** Toda la carga de un anillo con carga  $Q$  está a la misma distancia  $r$  de un punto  $P$  situado sobre el eje del anillo.

tos elementos al punto  $P$  es  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$ . Por consiguiente, podemos sacar el factor  $1/r$  de la integral de la ecuación (23.16) y

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

### Ejemplo 23.12

## Línea de carga

Se tiene una carga eléctrica  $Q$  distribuida uniformemente a lo largo de una línea o varilla delgada de longitud  $2a$ . Halle el potencial en el punto  $P$  a lo largo de la bisectriz perpendicular de la varilla a una distancia  $x$  de su centro.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Esta situación es la misma del ejemplo 21.11 (sección 21.5), donde hallamos una expresión del campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto arbitrario sobre el eje de las  $x$ . Se podría integrar  $\vec{E}$  con base en la ecuación (23.17) para hallar  $V$ . En vez de ello, integraremos de principio a fin la distribución de carga utilizando la ecuación (23.16) a fin de adquirir un poco más de experiencia con este planteamiento.

**EJECUTAR:** Al igual que en el ejemplo 21.11, el elemento de carga  $dQ$  correspondiente a un elemento de longitud  $dy$  de la varilla está dado por  $dQ = (Q/2a)dy$  (Fig. 23.21). La distancia de  $dQ$  a  $P$  es  $\sqrt{x^2 + y^2}$ , y la contribución de  $dV$  al potencial en  $P$  es

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Para obtener el potencial en  $P$  debido a la varilla en su totalidad, se integra  $dV$  de principio a fin la longitud de la varilla de  $y = -a$  a  $y = a$ :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \int_{-a}^a \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

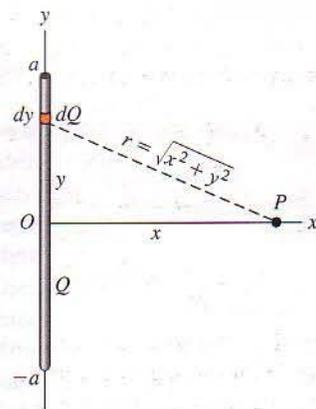
Se puede consultar la integral en una tabla. El resultado final es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{2a} \ln \left( \frac{\sqrt{a^2 + x^2} + a}{\sqrt{a^2 + x^2} - a} \right)$$

El potencial es una cantidad *escalar*; no es necesario considerar componentes de vectores en este cálculo, como hubimos de hacer para hallar el campo eléctrico en  $P$ . Por tanto, el cálculo del potencial es mucho más sencillo que el cálculo del campo.

**EVALUAR:** Dese cuenta que cuando  $x$  es mucho mayor que  $a$ , la expresión anterior de  $V$  se hace aproximadamente igual a  $V = Q/4\pi\epsilon_0 x$ . Esto corresponde al potencial de una carga puntual  $Q$  a la distancia  $x$ . Cuando estamos muy lejos de un anillo con carga, éste parece una carga puntual. (Llegamos a una conclusión análoga acerca del campo eléctrico de un anillo en el ejemplo 21.10).

También se hallan estos resultados con respecto a  $V$  integrando la expresión de  $E_x$  hallada en el ejemplo 21.10 (véase el problema 23.67).



**23.21** Cómo hallar el potencial eléctrico sobre la bisectriz perpendicular de una varilla con carga uniforme de longitud  $2a$ .

**EVALUAR:** Podemos comprobar nuestro resultado haciendo que  $x$  tienda a infinito. En este límite el punto  $P$  está infinitamente lejos de toda la carga, por lo que es de esperar que  $V$  tienda a cero; lo invitamos a verificar que así ocurre.

Al igual que en el ejemplo 23.11, este problema es más sencillo que hallar  $\vec{E}$  en el punto  $P$  porque el potencial es una cantidad escalar y no intervienen cálculos vectoriales.

### Evalúe su comprensión

Si el *campo* eléctrico en cierto punto es cero, ¿debe ser inevitable que el *potencial* eléctrico sea cero en ese punto? (*Sugerencia:* Considere el centro del anillo de los ejemplos 23.11 y 21.10).

## 23.4 | Superficies equipotenciales

Las líneas de campo (sección 21.6) nos ayudan a visualizar los campos eléctricos. De manera semejante, el potencial en diversos puntos de un campo eléctrico se puede representar gráficamente mediante *superficies equipotenciales*. Éstas utilizan la misma idea fundamental de los mapas topográficos, como los que utilizan los excursionistas y alpinistas (Fig. 23.22). En un mapa topográfico, se trazan curvas de nivel que pasan por los puntos que tienen una misma elevación. Se podría dibujar cualquier número de ellas, pero característicamente sólo se muestran unas pocas curvas de nivel a intervalos iguales de elevación. Si se traslada una masa  $m$  sobre el terreno a lo largo de una de estas curvas de nivel, la energía potencial gravitatoria  $mgy$  no cambia porque la elevación  $y$  es constante. Por consiguiente, las curvas de nivel de un mapa topográfico son en realidad curvas de energía potencial gravitatoria constante. Las curvas de nivel están próximas unas de otras donde el terreno es empinado y hay grandes cambios de elevación a lo largo de una distancia horizontal pequeña; las curvas de nivel están más separadas donde el terreno tiene una pendiente moderada. Una pelota que se deja rodar cuesta abajo experimenta la máxima fuerza gravitatoria cuesta abajo donde las curvas de nivel están más próximas unas de otras.

Por analogía con las curvas de nivel de un mapa topográfico, una **superficie equipotencial** es una superficie tridimensional sobre la cual el *potencial eléctrico*  $V$  es el mismo en todos los puntos. Si se traslada una carga de prueba  $q_0$  de un punto a otro sobre una superficie de este tipo, la energía potencial *eléctrica*  $q_0V$  permanece constante. En una región donde está presente un campo eléctrico se puede construir una superficie equipotencial que pase por cualquier punto. En los diagramas se acostumbra mostrar sólo unos pocos equipotenciales representativos, a menudo con diferencias de potencial iguales entre superficies adyacentes. Ningún punto puede estar en dos potenciales diferentes; por tanto, las superficies equipotenciales correspondientes a potenciales diferentes nunca se tocan ni se cruzan.

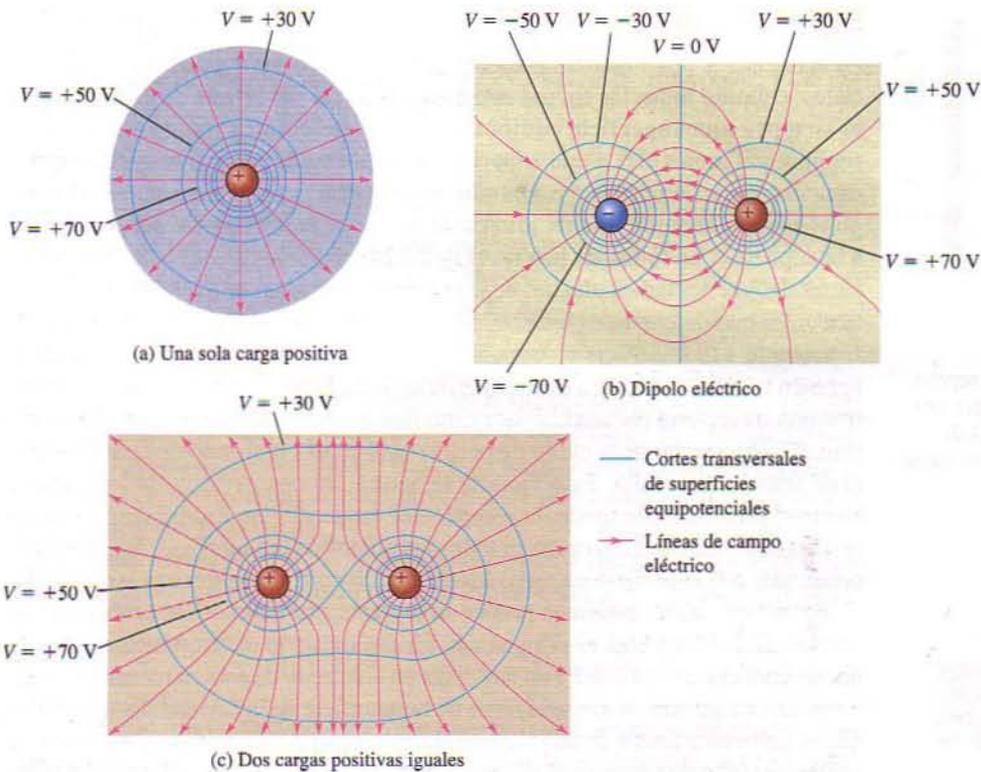
Ya que la energía potencial no cambia cuando una carga de prueba se traslada sobre una superficie equipotencial, el campo eléctrico no puede realizar trabajo sobre esa carga. Se sigue que  $\vec{E}$  debe ser perpendicular a la superficie en todos los puntos para que la fuerza eléctrica  $q_0\vec{E}$  sea en todo momento perpendicular al desplazamiento de una carga que se mueve sobre la superficie. **Las líneas de campo y las superficies equipotenciales son siempre mutuamente perpendiculares.** En general, las líneas de campo son curvas y las equipotenciales son superficies curvas. En el caso especial de un campo *uniforme*, en el que las líneas de campo son rectas y paralelas y están igualmente espaciadas, las superficies equipotenciales son *planos* paralelos perpendiculares a las líneas de campo.

La figura 23.23 muestra varias configuraciones de cargas. Las líneas de campo que están en el plano de las cargas se representan mediante líneas rojas, y las intersecciones de las superficies equipotenciales con este plano (esto es, cortes transversales de estas superficies) se muestran como líneas azules. Las superficies equipotenciales reales son tridimensionales. En todo cruce de una superficie equipotencial con una línea de campo, las dos son perpendiculares.

En la figura 23.23 se han dibujado superficies equipotenciales de modo que las diferencias de potencial entre superficies adyacentes sean iguales. En las regiones donde la magnitud de  $\vec{E}$  es grande, las superficies equipotenciales están próximas



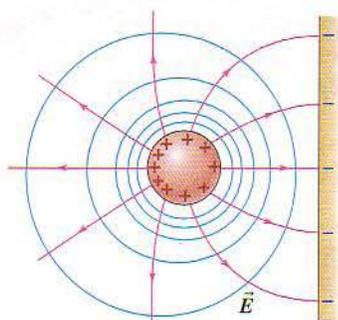
**23.22** Las curvas de nivel de un mapa topográfico son curvas de elevación constante y, por tanto, de energía potencial gravitatoria constante.



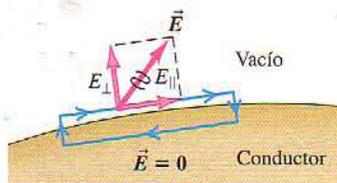
**23.23** Cortes transversales de superficies equipotenciales (líneas azules) y líneas de campo eléctrico (líneas rojas) correspondientes a conjuntos de cargas puntuales. Las diferencias de potencial entre superficies adyacentes son iguales. Compárense estos diagramas con los de la figura 21.26, que muestran sólo líneas de campo eléctrico.

unas de otras porque el campo realiza una cantidad de trabajo relativamente grande sobre una carga de prueba que sufre un desplazamiento comparativamente pequeño. Éste es el caso cerca de la carga puntual de la figura 23.23a o entre las dos cargas puntuales de la figura 23.23b; dese cuenta que en estas regiones las líneas de campo también están más próximas unas de otras. Esto es una analogía directa del hecho de que la fuerza de gravedad cuesta abajo es máxima en las regiones de un mapa topográfico donde las curvas de nivel están más próximas unas de otras. Recíprocamente, en las regiones donde el campo es más débil, las superficies equipotenciales están más separadas; esto sucede en los radios más grandes de la figura 23.23a, a la izquierda de la carga negativa o a la derecha de la carga positiva de la figura 23.23b, y a distancias mayores respecto de ambas cargas en la figura 23.23c. (Quizá parece que dos superficies equipotenciales se cruzan en el centro de la figura 23.23c, violando así la regla de que esto nunca puede ocurrir. De hecho, se trata de una sola superficie equipotencial con forma de 8).

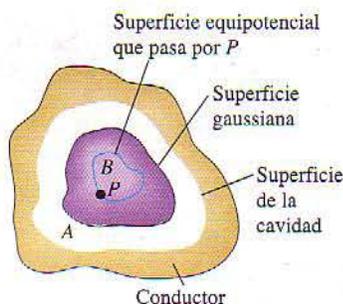
**CUIDADO** Sobre una superficie equipotencial en particular, el potencial  $V$  tiene el mismo valor en todos los puntos. No obstante, en general, la magnitud del campo eléctrico  $E$  no es la misma en todos los puntos de una superficie equipotencial. Por ejemplo, en la superficie equipotencial marcada como " $V = -30 \text{ V}$ " en la figura 23.23b, la magnitud  $E$  es menor a la izquierda de la carga negativa que entre las dos cargas. En la superficie equipotencial con forma de 8 de la figura 23.23c,  $E = 0$  en el punto medio equidistante de las dos cargas; en todos los demás puntos de esta superficie,  $E$  es diferente de cero.



**23.24** Cuando las cargas están en reposo, una superficie conductora es siempre una superficie equipotencial. Las líneas de campo (en rojo) son perpendiculares a una superficie conductora.



**23.25** Adentro del conductor,  $\vec{E} = 0$ . Si  $\vec{E}$  inmediatamente afuera del conductor tuviese una componente  $E_{||}$  paralela a la superficie del conductor, entonces el campo realizaría un trabajo total diferente de cero sobre una carga de prueba que recorre la espira rectangular y vuelve al punto de partida. Debido a que el campo  $\vec{E}$  es conservativo, esto es imposible. Por consiguiente,  $E_{||}$  debe ser cero y  $\vec{E}$  inmediatamente afuera de la superficie debe ser perpendicular a ella.



**23.26** Cavidad en un conductor. Si la cavidad no contiene carga, todos los puntos de la cavidad están al mismo potencial, el campo eléctrico es cero en todas las partes de la cavidad y no hay carga en ningún punto de su superficie.

## Equipotenciales y conductores

La siguiente es una importante aseveración acerca de las superficies equipotenciales: **Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor es siempre una superficie equipotencial.** Puesto que el campo eléctrico  $\vec{E}$  es siempre perpendicular a una superficie equipotencial, se puede verificar este enunciado si se demuestra que **cundo todas las cargas están en reposo, el campo eléctrico inmediatamente afuera de un conductor debe ser perpendicular a la superficie en todos los puntos** (Fig. 23.24). Sabemos que  $\vec{E} = 0$  en todas las partes del interior del conductor; de lo contrario, las cargas se trasladarían. En particular, en cualquier punto precisamente adentro de la superficie la componente de  $\vec{E}$  tangente a la superficie es cero. Se sigue que la componente tangencial de  $\vec{E}$  también es cero casi *afuera* de la superficie. Si no lo fuera, una carga podría recorrer una trayectoria rectangular que estuviese en parte adentro y en parte afuera (Fig. 23.25) y regresar al punto de partida habiéndose realizado una cantidad neta de trabajo sobre ella. Esto violaría la naturaleza conservativa de los campos electrostáticos; de este modo, la componente tangencial de  $\vec{E}$  precisamente afuera de la superficie debe ser cero en todos los puntos de la superficie. Así,  $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie en todos los puntos, lo que prueba nuestra aseveración.

Por último, ahora podemos probar un teorema que citamos sin probarlo en la sección 22.5. El teorema es el siguiente: en una situación electrostática, si un conductor contiene una cavidad y no hay carga en el interior de ésta, entonces no puede haber una carga neta *en ninguna parte* de la superficie de la cavidad. Esto significa que si uno está adentro de una caja conductora con carga, puede tocar sin peligro cualquier punto de las paredes interiores de la caja sin sufrir una descarga. Para verificar este teorema, primero demostraremos que *todos los puntos del interior de la cavidad están al mismo potencial*. En la figura 23.26 la superficie conductora  $A$  de la cavidad es una superficie equipotencial, como recién hemos demostrado. Supóngase que el punto  $P$  de la cavidad está a un potencial diferente; por lo tanto se puede construir una superficie equipotencial diferente  $B$  que incluya el punto  $P$ .

Considere ahora una superficie gaussiana (Fig. 23.26) entre dos superficies equipotenciales. En virtud de la relación entre  $\vec{E}$  y las equipotenciales, sabemos que en todos los puntos entre las equipotenciales el campo se dirige de  $A$  hacia  $B$ , o bien en todos los puntos se dirige de  $B$  hacia  $A$ , según la superficie equipotencial que esté al potencial más elevado. En uno u otro caso el flujo a través de esta superficie gaussiana es con certeza diferente de cero. Pero entonces la ley de Gauss afirma que la carga encerrada por la superficie gaussiana no puede ser cero. Esto contradice nuestra suposición inicial de que *no* hay carga en la cavidad. Por tanto, el potencial en  $P$  *no puede* ser diferente del que hay en la pared de la cavidad.

En consecuencia, la región de la cavidad en su totalidad, debe estar al mismo potencial. Sin embargo, para que esto sea cierto, *el campo eléctrico en el interior de la cavidad debe ser cero en todas partes*. Por último, la ley de Gauss demuestra que el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie de un conductor es proporcional a la densidad de carga superficial  $\sigma$  en ese punto. Se concluye que *la densidad de carga superficial en la pared de la cavidad es cero en todos los puntos*. Este razonamiento puede parecer tortuoso, pero vale la pena estudiarlo detenidamente.

**CAUIDADO** No confunda las superficies equipotenciales con las superficies gaussianas que estudiamos en el capítulo 22. Las superficies gaussianas son pertinentes sólo cuando se utiliza la ley de Gauss y se puede elegir *cualquier* superficie gaussiana que resulte conveniente. *No* podemos elegir libremente la forma de las superficies equipotenciales; su forma está determinada por la distribución de carga.

### Evalúe su comprensión

¿Cómo cambiarían los diagramas de la figura 23.23 si se invirtiera el signo de cada carga?

## 23.5 | Gradiente de potencial

Existe una estrecha relación entre el campo eléctrico y el potencial. La ecuación (23.17), que se reproduce a continuación, expresa un aspecto de esa relación:

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se conoce  $\vec{E}$  en diversos puntos, esta ecuación permite calcular diferencias de potencial. En esta sección mostraremos cómo dar la vuelta a esto; si se conoce el potencial  $V$  en diversos puntos, se puede determinar  $\vec{E}$  con base en él. Considerando  $V$  como una función de las coordenadas  $(x, y, z)$  de un punto en el espacio, demostraremos que las componentes de  $\vec{E}$  están directamente relacionadas con las *derivadas parciales* de  $V$  con respecto a  $x, y$  y  $z$ .

En la ecuación (23.17),  $V_a - V_b$  es el potencial de  $a$  con respecto a  $b$ , es decir, el cambio de potencial cuando un punto se traslada de  $b$  a  $a$ . Esto se puede escribir como

$$V_a - V_b = \int_a^b dV = - \int_a^b dV$$

donde  $dV$  es el cambio infinitesimal de potencial que acompaña a un elemento infinitesimal  $d\vec{l}$  de la trayectoria de  $b$  a  $a$ . Comparando con la ecuación (23.17), tenemos que

$$- \int_a^b dV = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Estas dos integrales deben ser iguales con *cualquier* par de límites  $a$  y  $b$ , y para que esto se cumpla los *integrados* deben ser iguales. En estos términos, para *cualquier* desplazamiento infinitesimal  $d\vec{l}$ ,

$$-dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

A fin de interpretar esta expresión escribimos  $\vec{E}$  y  $d\vec{l}$  en términos de sus componentes:  $\vec{E} = \hat{i} E_x + \hat{j} E_y + \hat{k} E_z$  y  $d\vec{l} = \hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz$ . Por lo tanto se tiene que

$$-dV = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

Suponga que el desplazamiento es paralelo al eje de las  $x$ , de modo que  $dy = dz = 0$ . Entonces  $-dV = E_x dx$  o  $E_x = -(dV/dx)_{y, z \text{ constantes}}$ , donde el subíndice nos recuerda que sólo  $x$  varía en la derivada; recuerde que  $V$  es en general una función de  $x, y$  y  $z$ . Pero esto es precisamente el significado de la derivada parcial  $\partial V/\partial x$ . Las componentes  $y$  y  $z$  de  $\vec{E}$  guardan la misma relación con las derivadas correspondientes de  $V$ ; por tanto,

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (23.19)$$

(componentes de  $\vec{E}$  en términos de  $V$ )

Esto es congruente con las unidades del campo eléctrico (V/m). Podemos escribir  $\vec{E}$  en términos de vectores unitarios como sigue:

$$\vec{E} = -\left(\hat{i} \frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial V}{\partial z}\right) \quad (\vec{E} \text{ en términos de } V) \quad (23.20)$$

En notación vectorial, la operación siguiente se conoce como el **gradiente** de la función  $f$ :

$$\vec{\nabla}f = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) f \quad (23.21)$$

El operador que se denota mediante el símbolo  $\vec{\nabla}$  se llama “grad” o “del”. Así que, en notación vectorial,

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}V \quad (23.22)$$

Esto se lee “ $\vec{E}$  es el negativo del gradiente de  $V$ ” o “ $\vec{E}$  es igual al grad  $V$  negativo”. La cantidad  $\vec{\nabla}V$  se le denomina *gradiente de potencial*.

En cada punto, el gradiente de potencial apunta en la dirección en la que  $V$   *aumenta*  con más rapidez con un cambio de posición. Por consiguiente, en cada punto la dirección de  $\vec{E}$  es la dirección en la que  $V$   *disminuye*  más rápidamente y siempre es perpendicular a la superficie equipotencial que pasa por el punto. Esto concuerda con nuestra observación (sección 23.2) de que desplazarse en la dirección del campo eléctrico significa desplazarse en la dirección de potencial decreciente.

La ecuación (23.22) no depende del punto cero de  $V$  que se haya elegido. Si se cambiara el punto cero, el efecto sería modificar  $V$  en la misma cantidad en todos los puntos; las derivadas de  $V$  serían las mismas.

Si  $\vec{E}$  es radial con respecto a un punto o un eje y  $r$  es la distancia al punto o eje, la relación que corresponde a las ecuaciones (23.19) es

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (\text{campo eléctrico radial}) \quad (23.23)$$

Suele ser posible calcular el campo eléctrico creado por una distribución de carga de una de dos formas: directamente, sumando los campos  $\vec{E}$  de cargas puntuales, o calculando primero el potencial y tomando en seguida su gradiente para hallar el campo. El segundo método suele ser más fácil porque el potencial es una cantidad *escalar* y requiere, en el peor de los casos, la integración de una función escalar. El campo eléctrico es una cantidad *vectorial*, que requiere el cálculo de componentes con respecto a cada elemento de carga y una integración individual por cada componente. Así pues, y haciendo a un lado su trascendencia fundamental, el potencial ofrece una técnica de cómputo muy útil en los cálculos de campos. Más adelante se presentan varios ejemplos en los que se aprovecha un conocimiento de  $V$  para hallar el campo eléctrico.

Conviene recalcar una vez más que, si se conoce  $\vec{E}$  en función de la posición, se puede calcular  $V$  mediante la ecuación (23.17) o (23.18), y si se conoce  $V$  en función de la posición, se puede calcular  $\vec{E}$  mediante la ecuación (23.19), (23.20) o (23.23). Deducir  $V$  a partir de  $\vec{E}$  requiere integración, y deducir  $\vec{E}$  a partir de  $V$  requiere diferenciación.

### Ejemplo 23.13

## Potencial y campo de una carga puntual

Según la ecuación (23.14) el potencial a una distancia radial  $r$  de una carga puntual  $q$  es  $V = q/4\pi\epsilon_0 r$ . Halle el campo eléctrico vectorial a partir de esta expresión de  $V$ .

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Por simetría, el campo eléctrico tiene sólo una componente radial  $E_r$ ; esta componente se halla mediante la ecuación (23.23).

**EJECUTAR:** De acuerdo con la ecuación (23.23),

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

por tanto, el campo eléctrico vectorial es

$$\vec{E} = \hat{r}E_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

**EVALUAR:** Nuestro resultado concuerda con la ecuación (21.7), como debe ser.

Un planteamiento alternativo es pasar por alto la simetría radial, escribir la distancia radial como  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , y tomar la derivada de  $V$  con respecto a  $x$ ,  $y$  y  $z$  como en la ecuación (23.20). Se obtiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qx}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \\ &= -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3}\end{aligned}$$

y, de manera análoga,

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

De acuerdo con la ecuación (23.30), el campo eléctrico es

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\left[ \hat{i} \left( -\frac{qx}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) + \hat{j} \left( -\frac{qy}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) + \hat{k} \left( -\frac{qz}{4\pi\epsilon_0 r^3} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \left( \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}\end{aligned}$$

Este planteamiento nos proporciona la misma respuesta, aunque con un poco más de esfuerzo. Es evidente que lo mejor es aprovechar la simetría de la distribución de carga siempre que sea posible.

### Ejemplo 23.14

## Potencial y campo afuera de un cilindro conductor con carga

En el ejemplo 23.10 (sección 23.3) hallamos que el potencial afuera de un cilindro conductor con carga de radio  $R$  y con carga por unidad de longitud  $\lambda$  es

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} (\ln R - \ln r)$$

Halle las componentes del campo eléctrico afuera del cilindro.

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Al igual que en el ejemplo 23.13, la simetría nos dice que  $\vec{E}$  tiene sólo una componente radial  $E_r$ , así que, una vez más, usaremos la ecuación (23.23).

**EJECUTAR:** La derivada de  $\ln R$  (una constante) es cero y la derivada de  $\ln r$  es  $1/r$ ; por tanto,

$$E_r = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\partial(\ln r)}{\partial r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r}$$

**EVALUAR:** Esta expresión de  $E_r$  es la misma que hallamos en el ejemplo 22.6 (sección 22.4).

### Ejemplo 23.15

## Potencial y campo de un anillo de carga

En el ejemplo 23.11 (sección 23.3) hallamos que, en el caso de un anillo de carga de radio  $a$  y con una carga total  $Q$ , el potencial en el punto  $P$  sobre el eje del anillo a una distancia  $x$  del centro es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

Halle el campo eléctrico en  $P$ .

### SOLUCIÓN

**IDENTIFICAR Y PLANTEAR:** Con base en la simetría de la distribución de carga que se muestra en la figura 23.20, el campo eléctrico a lo largo del eje de simetría del anillo puede tener sólo una componente  $x$ . Ésta se halla mediante la primera de las ecuaciones (23.19).

**EJECUTAR:** La componente  $x$  del campo eléctrico es

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

**EVALUAR:** Esto concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 21.10 (sección 21.5).

**CUIDADO** En este ejemplo,  $V$  no parece ser una función de  $y$  ni de  $z$ , pero no sería correcto concluir que  $\partial V/\partial y = \partial V/\partial z = 0$  y  $E_y = E_z = 0$  en todas partes. La razón es que nuestra expresión de  $V$  es válida sólo con respecto a puntos sobre el eje de las  $x$ , donde  $y = z = 0$ . Si tuviéramos la expresión completa de  $V$ , válida en todos los puntos del espacio, entonces ella nos permitiría hallar las componentes de  $\vec{E}$  en cualquier punto mediante la ecuación (23.19).

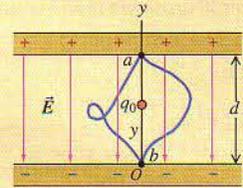
### Evalúe su comprensión

En cierta región del espacio el potencial está dado por  $V = A + Bx + Cy^3 + Dz^2$ , donde  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$  son constantes. ¿Cuál es el campo eléctrico en esta región?

RESUMEN

La fuerza eléctrica originada por cualquier conjunto de cargas en reposo es una fuerza conservativa. El trabajo  $W$  que la fuerza eléctrica realiza sobre una partícula con carga trasladándose dentro de un campo se puede representar mediante el cambio de una función potencial de energía  $U$ .

$$W_{a \rightarrow b} = U_a - U_b \quad (23.2)$$



La energía potencial eléctrica correspondiente a dos cargas puntuales  $q$  y  $q_0$  depende de su separación  $r$ . La energía potencial eléctrica correspondiente a una carga  $q_0$  en presencia de un conjunto de cargas  $q_1, q_2, q_3$  depende de la distancia entre cada una de estas otras cargas y  $q_0$ . (Véanse los ejemplos 23.1 y 23.2).

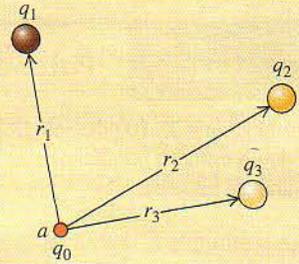
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r} \quad (23.9)$$

(dos cargas puntuales)

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} + \frac{q_3}{r_3} + \dots \right) \quad (23.10)$$

$$= \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

( $q_0$  en presencia de otras cargas puntuales)



El potencial, que se representa como  $V$ , es energía potencial por unidad de carga. La diferencia de potencial entre dos puntos es igual a la cantidad de trabajo que se necesitaría para trasladar una carga positiva unitaria de prueba entre esos puntos. El potencial  $V$  debido a una cantidad de carga se calcula sumando (si la carga es un conjunto de cargas puntuales) o integrando (si la carga es una distribución). (Véanse los ejemplos 23.3, 23.4, 23.5, 23.7, 23.11 y 23.12).

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (23.14)$$

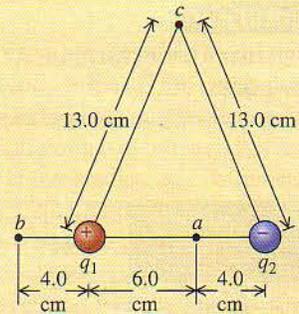
(debido a una carga puntual)

$$V = \frac{U}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{r_i} \quad (23.15)$$

(debido a un conjunto de cargas puntuales)

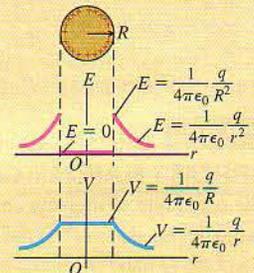
$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r} \quad (23.16)$$

(debido a una distribución de carga)



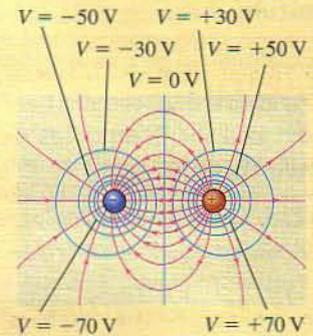
La diferencia de potencial entre dos puntos  $a$  y  $b$ , también llamada potencial de  $a$  con respecto a  $b$ , está dada por la integral de línea de  $\vec{E}$ . El potencial en un punto dado se encuentra hallando primero  $\vec{E}$  y efectuando luego esta integral. (Véanse los ejemplos 23.6, 23.8, 23.9 y 23.10).

$$V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^b E \cos \phi \, dl \quad (23.17)$$



Dos conjuntos de unidades equivalentes de magnitud de campo eléctrico son volts por metro (V/m) y newtons por coulomb (N/C). Un volt es un joule por coulomb ( $1 \text{ V} = 1 \text{ J/C}$ ). Una unidad de energía muy útil es el electrón volt (eV), que es la energía correspondiente a una partícula cuya carga es igual a la de un electrón que se desplaza a través de una diferencia de potencial de un volt. El factor de conversión es  $1 \text{ eV} = 1.602 \times 10^{-19} \text{ J}$ .

Una superficie equipotencial es una superficie en la que el potencial tiene el mismo valor en todos sus puntos. En un punto donde una línea de campo cruza una superficie equipotencial, ambas son perpendiculares. Cuando todas las cargas están en reposo, la superficie de un conductor siempre es una superficie equipotencial y todos los puntos del interior del conductor están al mismo potencial. Cuando una cavidad en el interior de un conductor no contiene carga, la cavidad en su totalidad es una región equipotencial y no hay carga superficial en ninguna parte de la superficie de la cavidad.



Si se conoce el potencial  $V$  en función de las coordenadas  $x$ ,  $y$  y  $z$ , las componentes del campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto están dadas por derivadas parciales de  $V$ . (Véanse los ejemplos del 23.13 al 23.15).

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \quad (23.19)$$

$$\vec{E} = -\left(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}\right) \text{ (forma vectorial) } (23.20)$$

### Términos clave

electrón volt, 881  
energía potencial (eléctrica), 870  
gradiente, 893

potencial (eléctrico), 878  
superficie equipotencial, 890

volt, 878  
voltaje, 878

### Notas

## Respuesta a la pregunta inicial del capítulo

El funcionamiento del pararrayos se describe después del ejemplo 23.8 (sección 23.3).

## Respuestas a las preguntas de Evalúe su comprensión

**Sección 23.1** La configuración de las cargas se muestra en la figura 21.12. De acuerdo con la ecuación (23.11),

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{0.60 \text{ m}} + \frac{q_1 Q}{0.50 \text{ m}} + \frac{q_2 Q}{0.50 \text{ m}} \right)$$

Utilizando  $q_1 = 2.0 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 2.0 \mu\text{C}$  y  $Q = 4.0 \mu\text{C}$ , se encuentra que  $U = 0.35 \text{ J}$ . La energía total es positiva, lo cual indica que se requiere trabajo positivo para traer las tres cargas del infinito a las posiciones que se muestran en la figura 21.12.

**Sección 23.2** Si  $V = 0$  en cierto punto,  $\vec{E}$  no es necesariamente cero en ese punto. Un ejemplo es el punto  $c$  de las figuras 21.20 y 23.13, con respecto al cual hay un campo eléctrico en la dirección  $+x$  (véase el ejemplo 21.9 de la sección 21.5) no obstante que  $V = 0$  (véase el ejemplo 23.4). Este resultado no es sorprendente, porque  $V$  y  $\vec{E}$  son cantidades muy diferentes:  $V$  es la cantidad neta de trabajo que se requiere para traer una carga unitaria del infinito al punto en cuestión, en tanto que  $\vec{E}$  es la fuerza eléctrica que actúa sobre una unidad de carga cuando ésta alcanza ese punto.

**Sección 23.3** Si  $\vec{E} = 0$  en cierto punto,  $V$  no es necesariamente cero en ese punto. Un ejemplo es el punto  $O$  del centro del anillo con carga de las figuras 21.21 y 23.20. De acuerdo con el ejemplo 21.10 (sección 21.5), el campo eléctrico es cero en  $O$ , porque las contribuciones de campo eléctrico de diferentes partes del anillo se cancelan totalmente. No obstante, de acuerdo con el ejemplo 23.11, el potencial en  $O$  no es cero; este punto corresponde a  $x = 0$ ; por tanto,  $V = (1/4\pi\epsilon_0)(Q/a)$ . Este valor de  $V$  corresponde al trabajo que sería necesario realizar para trasladar una carga positiva unitaria de prueba a lo largo de una trayectoria del infinito al punto  $O$ ; es diferente de cero porque el anillo con carga repele la carga de prueba, por lo que se debe realizar trabajo para trasladar la carga de prueba hacia el anillo.

**Sección 23.4** Si se sustituyesen las cargas positivas de la figura 23.23 por cargas negativas, y viceversa, las líneas de campo eléctrico tendrían la misma forma pero su dirección se invertiría. Las superficies equipotenciales serían las que se muestran en la figura 23.23, pero se invertiría el signo del potencial. Por ejemplo, las superficies de la figura 23.23b con potencial  $V = +30 \text{ V}$  y  $V = -50 \text{ V}$  tendrían los potenciales  $V = -30 \text{ V}$  y  $V = +50 \text{ V}$ , respectivamente.

**Sección 23.5** De acuerdo con la ecuación (23.20),  $\vec{E} = -(\hat{i}\frac{\partial V}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial V}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial V}{\partial z}) = -(B\hat{i} + 3Cy^2\hat{j} + 2Dz\hat{k})$ . Dese cuenta que la constante  $A$  no tiene efecto alguno sobre el campo eléctrico. Esto ilustra el hecho de que se puede sumar una constante al potencial en todos los puntos sin modificar en nada la física real, es decir, sin alterar ni  $\vec{E}$  ni la diferencia de potencial entre dos puntos cualesquiera.

## Preguntas para análisis

**P23.1** Un estudiante pregunta: "Ya que el potencial eléctrico siempre es proporcional a la energía potencial, ¿en modo alguno para qué molestarse con el concepto de potencial?" ¿Qué respondería usted?

**P23.2** El potencial (respecto a un punto en el infinito) a medio camino entre dos cargas de igual magnitud y signo opuesto es cero. ¿Es posible traer una carga de prueba del infinito a este punto medio de modo que no se realice trabajo en ninguna parte del desplazamiento? En caso afirmativo, describa cómo se podría hacer. Si no es posible, explique por qué.

**P23.3** ¿Es posible disponer dos cargas puntuales separadas por una distancia finita, de modo que la energía potencial eléctrica del ordenamiento sea la misma que si las dos cargas estuviesen infinitamente lejos una de la otra? ¿Por qué? ¿Y si se tienen tres cargas? Explique su razonamiento.

**P23.4** En un examen de física que una vez se hizo en una famosa universidad, se pedía a los estudiantes que calcularan la energía potencial de cierta distribución de cargas puntuales. Una de las estudiantes no efectuó ningún cálculo para resolver este problema, sino que simplemente respondió con: "La energía potencial puede tener el valor que uno quiera". Aunque ésta no era la respuesta que el profesor tenía en mente al redactar el problema, la calificación fue de todos modos totalmente favorable para la estudiante. ¿Por qué era correcta esta respuesta? (Nota: ¡No intente hacer esto en sus exámenes!)

**P23.5** Si  $\vec{E}$  es cero en todos los puntos a lo largo de cierta trayectoria que lleva del punto  $A$  al punto  $B$ , ¿cuál es la diferencia de potencial entre esos dos puntos? ¿Significa esto que  $\vec{E}$  es cero en todos los puntos a lo largo de cualquier trayectoria de  $A$  a  $B$ ? Explique su respuesta.

**P23.6** Si  $\vec{E}$  es cero en todas partes de cierta región del espacio, ¿necesariamente el potencial también es cero en esta región? ¿Por qué? Si no lo es, ¿qué se puede afirmar acerca del potencial?

**P23.7** Si se efectúa la integral del campo eléctrico  $\int \vec{E} \cdot d\vec{l}$  con respecto a una trayectoria cerrada, como el que se muestra en la figura 23.27, la integral será siempre igual a cero, cualquiera que sea la forma del trayecto y la ubicación de las cargas con respecto al trayecto. Explique por qué.

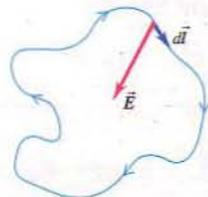


Figura 23.27 Pregunta P23.7.

**P23.8** La diferencia de potencial entre los dos bornes de una batería AA (de las que se usan en las lámparas de mano y en los radios portátiles) es de  $1.5 \text{ V}$ . Si se colocan dos baterías AA unidas por los extremos, con el borne positivo de una batería en contacto con el borne negativo de la otra, ¿cuál es la diferencia de potencial entre los bornes de los extremos expuestos de la combinación? Explique su razonamiento.

**P23.9** Es fácil crear una diferencia de potencial de varios miles de volts entre el cuerpo y el piso, frotando los zapatos sobre una alfombra de nylon. Al tocar la perilla metálica de una puerta, recibimos una descarga moderada. Sin embargo, el contacto con un cable eléctrico con un voltaje comparable sería probablemente mortal. ¿A qué se debe la diferencia?

**P23.10** Si se conoce el potencial eléctrico en un solo punto, ¿se puede hallar  $\vec{E}$  en ese punto? En caso afirmativo, ¿cómo? Si no se puede, ¿por qué?

**P23.11** Ya que las líneas de campo y las superficies equipotenciales son siempre perpendiculares, nunca se pueden cruzar dos superficies equipotenciales; si lo hicieran, la dirección de  $\vec{E}$  sería ambigua en los puntos de cruce. Incluso, dos superficies equipotenciales parecen cruzarse en el centro de la figura 23.23c. Explique por qué no existe ambigüedad alguna acerca de la dirección de  $\vec{E}$  en este caso en particular.

**P23.12** Al caminar una persona a través de una cierta región del espacio, el potencial en su posición se hace cada vez más positivo al trasladarse de norte a sur. El potencial no cambia al trasladarse hacia el este, el oeste, arriba o abajo. ¿Hay necesariamente un campo eléctrico en esta región? De ser así, ¿cuál es su dirección? Explique su razonamiento. Sugiera una forma de hacer variar el potencial con la posición del modo como se ha descrito.

**P23.13** ¿Es el gradiente de potencial una cantidad escalar o una cantidad vectorial? ¿Cómo se puede saber?

**P23.14** Se va a cargar una esfera conductora induciendo en ella carga positiva poco a poco hasta el momento en que la carga total sea  $Q$ . Se afirma que el trabajo total que este proceso requiere es proporcional a  $Q^2$ . ¿Es correcto esto? ¿Por qué?

**P23.15** ¿Existen casos en electrostática en los que una superficie conductora *no* sea una superficie equipotencial? Si los hay, cite un ejemplo. Si no, explique por qué.

**P23.16** Se coloca una esfera conductora entre dos placas paralelas con carga como las que se muestran en la figura 23.1. ¿Depende el campo eléctrico en el interior de la esfera del lugar preciso en que se coloca la esfera entre las placas? ¿Y el potencial eléctrico adentro de la esfera? ¿Dependen las respuestas a estas preguntas del hecho de que haya o no una carga neta en la esfera? Explique su razonamiento.

**P23.17** Un conductor con una carga neta  $Q$  tiene una cavidad hueca en su interior. ¿Varía el potencial de un punto a otro dentro del material del conductor? ¿Y adentro de la cavidad? ¿Cómo es el potencial adentro de la cavidad en comparación con el potencial adentro del material del conductor?

**P23.18** Un cable de cd de alto voltaje cae sobre un auto, de modo que toda su carrocería metálica está a un potencial de 10,000 V con respecto a tierra. a) ¿Qué le ocurre a los ocupantes cuando están sentados dentro del auto? b) ¿cuando salen de él? Explique su razonamiento.

**P23.19** Cuando se aproxima una tormenta eléctrica, a veces los marineros que están en el mar observan un fenómeno conocido como "fuego de San Telmo", o sea una luz azulosa parpadeante en las puntas de los mástiles. ¿A qué se debe? ¿Por qué se presenta en las puntas de los mástiles? ¿Por qué es más pronunciado el efecto cuando los mástiles están mojados? (Sugerencia: El agua de mar es buena conductora de la electricidad).

**P23.20** Se coloca una carga puntual positiva cerca de un plano conductor muy grande. Un profesor de física afirma que el campo creado por esta configuración es el mismo que se obtendría retirando el plano y colocando una carga puntual negativa de igual magnitud en la posición equivalente de la imagen en el espejo, detrás de la posición inicial del plano. ¿Es correcta su aseveración? ¿Por qué? (Sugerencia: Estudie la figura 23.23b).

**P23.21** En electrónica se acostumbra definir el potencial de tierra (pensando en la Tierra como en un gran conductor) como cero. ¿Es esto congruente con el hecho de que la Tierra tiene una carga eléctrica neta diferente de cero? (Consulte el ejercicio 21.30).

## Ejercicios

### Sección 23.1 Energía potencial eléctrica

**23.1** Una carga puntual  $q_1 = +2.40 \mu\text{C}$  se mantiene inmóvil en el origen. Una segunda carga puntual  $q_2 = -4.30 \mu\text{C}$  se traslada del

punto  $x = 0.150 \text{ m}$ ,  $y = 0$  al punto  $x = 0.250 \text{ m}$ ,  $y = 0.250 \text{ m}$ . ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre  $q_2$ ?

**23.2** Una carga puntual  $q_1$  se mantiene fija en el origen. Se coloca una segunda carga  $q_2$  en el punto  $a$  y la energía potencial eléctrica del par de cargas es  $+5.4 \times 10^{-8} \text{ J}$ . Cuando la segunda carga se traslada al punto  $b$ , la fuerza eléctrica sobre la carga realiza  $-1.9 \times 10^{-8} \text{ J}$  de trabajo. ¿Cuál es la energía potencial eléctrica del par de cargas cuando la segunda está en el punto  $b$ ?

**23.3** Una esfera metálica pequeña, con una carga neta de  $q_1 = -2.80 \mu\text{C}$ , se mantiene en una posición fija por medio de soportes aislantes. Se proyecta hacia  $q_1$  una segunda esfera metálica pequeña, con una carga neta de  $q_2 = -7.80 \mu\text{C}$  y una masa de 1.50 g. Cuando las dos esferas están a 0.800 m una de la otra,  $q_2$  se traslada hacia  $q_1$  con una rapidez de 22.0 m/s (Fig. 23.28). Suponga que las dos esferas se pueden tratar como cargas puntuales. No considere la fuerza de gravedad. a) ¿Cuál es la rapidez de  $q_2$  cuando las esferas están a 0.400 m una de la otra? b) ¿Cuánto es lo más que  $q_2$  se acerca a  $q_1$ ?

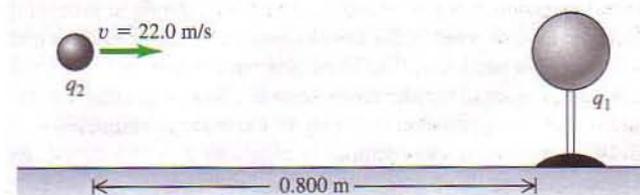


Figura 23.28 Ejercicio 23.3.

**23.4** ¿A qué distancia de una carga puntual de  $-7.20 \mu\text{C}$  debe colocarse una carga puntual de  $+2.30 \mu\text{C}$  para que la energía potencial  $U$  del par de cargas sea de  $-0.400 \text{ J}$ ? (Tome  $U$  como cero cuando la separación entre las cargas es infinita).

**23.5** Se mantiene fija en el origen una carga puntual  $Q = +4.60 \mu\text{C}$ . Se coloca sobre el eje de las  $x$ , a 0.250 m del origen, una segunda carga puntual  $q = +1.20 \mu\text{C}$  con una masa de  $2.80 \times 10^{-4} \text{ kg}$ . a) ¿Cuál es la energía potencial eléctrica  $U$  del par de cargas? (Tome  $U$  como cero cuando la separación entre las cargas es infinita). b) Se deja libre la segunda carga puntual, inicialmente en reposo. i) ¿Cuál es su rapidez cuando su distancia al origen es de 0.500 m? ii) ¿5.00 m? iii) ¿50.0 m?

**23.6** Se colocan tres cargas puntuales iguales de  $1.20 \mu\text{C}$  en los vértices de un triángulo equilátero cuyos lados miden 0.500 m. ¿Cuál es la energía potencial del sistema? (Tome como cero la energía potencial de las tres cargas cuando la separación entre ellas es infinita).

**23.7** Una carga puntual  $q_1 = 4.00 \text{ nC}$  se coloca en el origen, y una segunda carga puntual  $q_2 = -3.00 \text{ nC}$  sobre el eje de las  $x$  en  $x = +20.0 \text{ cm}$ . Se va a colocar una tercera carga puntual  $q_3 = 2.00 \text{ nC}$  sobre el eje de las  $x$ , entre  $q_1$  y  $q_2$ . (Tome como cero la energía potencial de las tres cargas cuando la separación entre ellas es infinita). a) ¿Cuál es la energía potencial del sistema de tres cargas si  $q_3$  se coloca en  $x = +10.0 \text{ cm}$ ? b) ¿Dónde se debe colocar  $q_3$  para que la energía potencial del sistema sea igual a cero?

**23.8** En el inciso (c) del ejemplo 23.1 (sección 23.1), calcule la distancia entre el positrón y la partícula alfa cuando el positrón queda momentáneamente en reposo.

**23.9** Tres cargas puntuales, que inicialmente están infinitamente lejos unas de otras, se colocan en los vértices de un triángulo equilátero de lados  $d$ . Dos de las cargas puntuales son idénticas y su carga es  $q$ .

Si el trabajo neto que se requiere para colocar las tres cargas en los vértices del triángulo es cero, ¿cuál es el valor de la tercera carga?

**23.10** Un protón, una partícula alfa, un electrón y un neutrón están en reposo en los vértices de un cuadrado, cuyos lados miden  $5.00 \times 10^{-10}$  m, con el electrón y el neutrón en vértices opuestos. ¿Cuál es la cantidad mínima de trabajo que se debe realizar para alejar mucho las partículas unas de otras?

**23.11** Se mantienen en reposo, en los vértices de un triángulo rectángulo cuyos lados miden  $8.00 \times 10^{-10}$  m, dos protones y una partícula alfa. Luego se dejan libres las partículas, las cuales se separan. ¿Cuál es su energía total cuando están muy lejos unas de otras?

**23.12** Un acelerador ciclotrón dirige dos protones uno contra el otro, cada uno con una rapidez de 1000 km/s medida con respecto a la Tierra. Halle la fuerza eléctrica máxima que estos protones ejercen uno sobre el otro.

### Sección 23.2 Potencial eléctrico

**23.13** Una partícula pequeña tiene una carga de  $-5.00 \mu\text{C}$  y una masa de  $2.00 \times 10^{-4}$  kg. Se traslada desde el punto A, donde el potencial eléctrico es  $V_A = +200$  V, al punto B, donde el potencial eléctrico es  $V_B = +800$  V. La fuerza eléctrica es la única fuerza que actúa sobre la partícula. Ésta tiene una rapidez de 5.00 m/s en el punto A. ¿Cuál es su rapidez en el punto B? ¿Se traslada con más rapidez o más lentamente en B que en A? Explique su respuesta.

**23.14** Se colocan cargas puntuales idénticas  $q = +5.00 \mu\text{C}$  en vértices opuestos de un cuadrado. La longitud de cada lado del cuadrado es de 0.200 m. Se coloca una carga puntual  $q_0 = -2.00 \mu\text{C}$  en uno de los vértices desocupados. ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza eléctrica sobre  $q_0$  cuando esta carga es desplazada desde el otro vértice desocupado?

**23.15** La dirección de un campo eléctrico uniforme es hacia el este. El punto B está a 2.00 m al oeste del punto A, el punto C está a 2.00 m al este del punto A, y el punto D está 2.00 m al sur del A. Con respecto a cada punto, ¿es el potencial en ese punto mayor, menor o el mismo que en el punto A? Exponga el razonamiento en el que se apoyan sus respuestas.

**23.16** Una partícula con una carga de  $+4.20$  nC está inicialmente en reposo en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  dirigido hacia la izquierda. Al quedar en libertad, la partícula se desplaza a la izquierda y, después de recorrer 6.00 cm, su energía cinética resulta ser de  $+1.50 \times 10^{-6}$  J. a) ¿Qué trabajo realizó la fuerza eléctrica? b) ¿Cuál es el potencial del punto de partida con respecto al punto final? c) ¿Cuál es la magnitud de  $\vec{E}$ ?

**23.17** Se coloca una carga de 28.0 nC en un campo eléctrico uniforme dirigido verticalmente hacia arriba y cuya magnitud es de  $4.00 \times 10^4$  V/m. ¿Qué trabajo realiza la fuerza eléctrica cuando la carga se traslada a) 0.450 m a la derecha; b) 0.670 m hacia arriba; c) 2.60 m a un ángulo de  $45^\circ$  hacia abajo con respecto a la horizontal?

**23.18** Dos cargas puntuales fijas de  $+3.00$  nC y  $+2.00$  nC están separadas por una distancia de 50.0 cm. Se deja libre un electrón, inicialmente en reposo, en un punto equidistante entre las dos cargas, el cual se traslada a lo largo de la línea que las enlaza. ¿Cuál es la rapidez del electrón cuando está a 10.0 cm de la carga de  $+3.00$  nC?

**23.19** Se tiene una carga puntual de  $2.50 \times 10^{-11}$  C. a) ¿A qué distancia de esta carga es el potencial eléctrico 90.0 V? b) ¿30.0 V? Tome el potencial como cero a una distancia infinita de la carga.

**23.20** El potencial V a una distancia de 25.0 cm desde una esfera muy pequeña con carga es de 48.0 V, tomando V como cero a una

distancia infinita desde la esfera. a) Si se trata la esfera como una carga puntual, ¿cuál es su carga? b) ¿Cuál es el potencial a una distancia de 75.0 cm desde la esfera?

**23.21** Dos cargas puntuales  $q_1 = +2.40$  nC y  $q_2 = -6.50$  nC están a 0.100 m una de otra. El punto A está a medio camino entre ambas; el punto B está a 0.080 m de  $q_1$  y a 0.060 m de  $q_2$  (Fig. 23.29). Tome el potencial eléctrico como cero en el infinito. Halle a) el potencial en el punto A; b) el potencial en el punto B; c) el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre una carga de 2.50 nC que viaja del punto B al punto A.

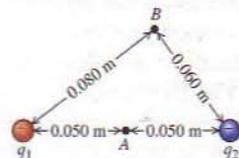


Figura 23.29 Ejercicio 23.21.

**23.22** Dos cargas puntuales positivas, cada una de magnitud  $q$ , están fijas sobre el eje de las  $y$  en los puntos  $y = +a$  y  $y = -a$ . Tome el potencial como cero a una distancia infinita de las cargas. a) Muestre las posiciones de las cargas en un diagrama. b) ¿Cuál es el potencial  $V_0$  en el origen? c) Muestre que el potencial en cualquier punto sobre el eje de las  $x$  es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

d) Grafique el potencial sobre el eje de las  $x$  en función de  $x$  en el intervalo de  $x = -4a$  a  $x = +4a$ . e) ¿Cuál es el potencial cuando  $x \gg a$ ? Explique por qué se obtiene este resultado.

**23.23** Una carga positiva  $+q$  está en el punto  $x = 0, y = -a$ , y una carga negativa  $-q$  se encuentra en el punto  $x = 0, y = +a$ . a) Muestre las posiciones de las cargas en un diagrama. b) Deduzca una expresión del potencial  $V$  en puntos sobre el eje de las  $x$  en función de la coordenada  $x$ . Tome  $V$  como cero a una distancia infinita de las cargas. c) Grafique  $V$  en puntos sobre el eje de las  $x$  en función de  $x$  en el intervalo de  $x = -4a$  a  $x = +4a$ . d) ¿Cuál es la respuesta al inciso (b) si se intercambian las cargas de modo que  $+q$  esté en  $y = +a$  y  $-q$  esté en  $y = -a$ ?

**23.24** Considere el ordenamiento de cargas que se describe en el ejercicio 23.23. a) Deduzca una expresión para el potencial  $V$  en puntos sobre el eje de las  $y$  en función de la coordenada  $y$ . Tome  $V$  como cero a una distancia infinita de las cargas. c) Grafique  $V$  en puntos sobre el eje de las  $y$  en función de  $y$  en el intervalo de  $y = -4a$  a  $y = +4a$ . c) Demuestre que cuando  $y \gg a$ , el potencial en un punto sobre el eje positivo de las  $y$  está dado por  $V = -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\right)2qaly^2$ . d) ¿Cuáles son las respuestas a los incisos (a) y (c) si se intercambian las cargas de modo que  $+q$  esté en  $y = +a$  y  $-q$  esté en  $y = -a$ ?

**23.25** Una carga positiva  $q$  está fija en el punto  $x = 0, y = 0$ , y una carga negativa  $-2q$  está fija en el punto  $x = a, y = 0$ . a) Muestre las posiciones de las cargas en un diagrama. b) Deduzca una expresión del potencial  $V$  en puntos sobre el eje de las  $x$  en función de la coordenada  $x$ . Tome  $V$  como cero a una distancia infinita de las cargas. c) ¿En qué posiciones sobre el eje de las  $x$  es  $V = 0$ ? d) Grafique  $V$  en puntos sobre el eje de las  $x$  en función de  $x$  en el intervalo de  $x = -2a$  a  $x = +2a$ . e) ¿Cómo cambia la respuesta al inciso (b) cuando  $x \gg a$ ? Explique por qué se obtiene este resultado.

**23.26** Considere el ordenamiento de cargas que se describe en el ejercicio 23.25. a) Deduzca una expresión del potencial  $V$  en puntos sobre el eje de las  $y$  en función de la coordenada  $y$ . Tome  $V$  como cero a una distancia infinita de las cargas. b) ¿En qué

posiciones sobre el eje de las  $y$  es  $V = 0$ ? c) Grafique  $V$  en puntos sobre el eje de las  $y$  en función de  $y$  en el intervalo de  $y = -2a$  a  $y = +2a$ . e) ¿Cómo cambia la respuesta al inciso (a) cuando  $x \gg a$ ? Explique por qué se obtiene este resultado.

**23.27** Antes del advenimiento de la electrónica de estado sólido, los bulbos de vacío se usaban extensamente en radios y otros aparatos. Un tipo sencillo de bulbo de vacío conocido como *diodo* se compone fundamentalmente de dos electrodos en el interior de un compartimiento al alto vacío. Uno de los electrodos, el *cátodo*, se mantiene a una temperatura alta y emite electrones desde su superficie. Se mantiene una diferencia de potencial de algunos cientos de volts entre el cátodo y el otro electrodo, conocido como el *ánodo*, con este último al potencial más elevado. Suponga que un diodo consiste en un ánodo cilíndrico de 0.558 cm de radio. El potencial del ánodo es 295 V mayor que el del cátodo. Un electrón parte de la superficie del cátodo con una rapidez inicial de cero. Halle su rapidez al incidir en el ánodo.

**23.28** A cierta distancia de una carga puntual, el potencial y la magnitud del campo eléctrico debido a esa carga son de 4.98 V y 12.0 V/m, respectivamente. (Tome el potencial como cero en el infinito). a) ¿Cuál es la distancia a la carga puntual? b) ¿Cuál es la magnitud de la carga? c) ¿Está dirigido el campo eléctrico hacia la carga puntual, o en sentido contrario?

**23.29** Un campo eléctrico uniforme tiene una magnitud  $E$  y está dirigido en la dirección  $x$  negativa. La diferencia de potencial entre el punto  $a$  (en  $x = 0.60$  m) y el punto  $b$  (en  $x = 0.90$  m) es de 240 V. a) ¿Cuál de los puntos,  $a$  o  $b$ , está al potencial más elevado? b) Calcule el valor de  $E$ . c) Una carga puntual negativa  $q = -0.200$  nC se traslada de  $b$  a  $a$ . Calcule el trabajo realizado por el campo eléctrico sobre la carga puntual.

**23.30** Con respecto a cada uno de los arreglos siguientes de dos cargas puntuales, halle todos los puntos a lo largo de la recta que pasa por ambas cargas en los que el potencial eléctrico  $V$  es cero (tome  $V = 0$  a una distancia infinita de las cargas) y en los que el campo eléctrico  $E$  es cero: a) cargas  $+Q$  y  $+2Q$  separadas por una distancia  $d$ ; b) cargas  $-Q$  y  $+2Q$  separadas por una distancia  $d$ . c) ¿Son tanto  $V$  como  $E$  cero en los mismos lugares? Explique su respuesta.

**23.31** a) Se va a acelerar un electrón de  $3.00 \times 10^6$  m/s a  $8.00 \times 10^6$  m/s. ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón para lograr esto? b) ¿A través de qué diferencia de potencial debe pasar el electrón para que su rapidez disminuya de  $8.00 \times 10^6$  m/s a cero?

### Sección 23.3 Cálculo del potencial eléctrico

**23.32** Una carga eléctrica total de 3.50 nC está distribuida uniformemente en la superficie de una esfera metálica con un radio de 24.0 cm. Si el potencial es cero en un punto en el infinito, halle el valor del potencial a las distancias siguientes del centro de la esfera: a) 48.0 cm; b) 24.0 cm; c) 12.0 cm.

**23.33** Un anillo delgado con carga uniforme tiene un radio de 15.0 cm y una carga total de +24.0 nC. Se coloca un electrón sobre el eje del anillo, a una distancia de 30.0 cm de su centro, obligándolo a permanecer en reposo sobre el eje del anillo. Después se deja libre el electrón. a) Describa el movimiento consecutivo del electrón. b) Halle la rapidez del electrón cuando éste alcanza el centro del anillo.

**23.34** Una línea de carga infinitamente larga tiene una densidad lineal de carga de  $5.00 \times 10^{-12}$  C/m. Un protón (masa  $1.67 \times 10^{-27}$  kg, carga  $+1.60 \times 10^{-19}$  C) está a 18.0 cm de la línea y se traslada

directamente hacia ella a  $1.50 \times 10^3$  m/s. ¿Cuál es la aproximación máxima del protón a la línea de carga?

**23.35** Dos placas metálicas paralelas grandes tienen cargas opuestas de igual magnitud. Las separa una distancia de 45.0 mm y la diferencia de potencial entre ellas es de 360 V. a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico (se supone uniforme) en la región entre las placas? b) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que este campo ejerce sobre una partícula con una carga de +2.40 nC? c) Con base en los resultados del inciso (b), calcule el trabajo realizado por el campo sobre la partícula cuando ésta se traslada de la placa de mayor a la de menor potencial. d) Compare el resultado del inciso (c) con el cambio de energía potencial de la misma carga, calculado a partir del potencial eléctrico.

**23.36** Dos láminas metálicas paralelas grandes con cargas opuestas de igual magnitud están separadas por una distancia de 38.0 mm. El campo eléctrico entre ellas es uniforme y su magnitud es de 480 N/C. a) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las láminas? b) ¿Cuál lámina está a un potencial más alto: la que tiene carga positiva o la que tiene carga negativa? c) ¿Cuál es la densidad de carga superficial  $\sigma$  de la lámina positiva?

**23.37** Se establece una diferencia de potencial de 4.75 kV entre placas paralelas en el aire. a) Si el aire se torna eléctricamente conductor cuando el campo eléctrico excede los  $3.00 \times 10^6$  V/m, ¿cuál es la separación mínima de las placas? b) Cuando la separación tiene el valor mínimo calculado en el inciso (a), ¿cuál es la densidad superficial de carga de cada placa?

**23.38** Dos placas conductoras paralelas grandes con cargas opuestas de igual magnitud están separadas por una distancia de 2.20 cm. a) Si la magnitud de la densidad de carga superficial de cada placa es de  $47.0$  nC/m<sup>2</sup>, ¿cuál es la magnitud de  $\vec{E}$  en la región entre las placas? b) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las dos placas? c) Si se duplica la separación entre las placas pero se mantiene constante la densidad de carga superficial en el valor del inciso (a), ¿qué le ocurre a la magnitud del campo eléctrico y a la diferencia de potencial?

**23.39** a) Demuestre que  $V$  de una coraza esférica de radio  $R$ , con una carga  $q$  distribuida uniformemente en su superficie, es el mismo que el de un conductor sólido de radio  $R$  y con carga  $q$ . b) Si usted frota un globo inflado sobre una alfombra, el globo adquiere un potencial 1200 V menor que su potencial antes de tener carga. Si la carga está distribuida uniformemente en la superficie del globo y si el radio de éste es de 15 cm, ¿cuál es la carga neta del globo? c) A la luz de su diferencia de potencial de 1200 V con respecto a usted, ¿considera que este globo es peligroso? Explique su respuesta.

**23.40** El campo eléctrico en la superficie de una esfera sólida de cobre con carga cuyo radio es de 0.200 m es de 3800 N/C, dirigido hacia el centro de la esfera. ¿Cuál es el potencial en el centro de la esfera si se toma como cero a una distancia infinita de la esfera?

### Sección 23.4 Superficies equipotenciales y

#### Sección 23.5 Gradiente de potencial

**23.41** En cierta región del espacio el potencial eléctrico es  $V(x, y, z) = Ax - By^2 + Cz$ , donde  $A$ ,  $B$  y  $C$  son constantes positivas. a) Calcule las componentes  $x$ ,  $y$  y  $z$  del campo eléctrico. b) ¿En cuáles puntos el campo eléctrico es igual a cero?

**23.42** El potencial debido a una carga puntual  $Q$  en el origen se puede escribir como

$$V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

a) Calcule  $E_x$ ,  $E_y$  y  $E_z$  mediante la ecuación (23.19). b) Muestre que el resultado del inciso (a) concuerda con la ecuación (21.7) del campo eléctrico de una carga puntual.

**23.43** El potencial está dado por  $V = 0$  cuando  $z < 0$ ,  $V = Cz$  cuando  $0 < z < d$  y  $V = Cd$  cuando  $z > d$ , donde  $C$  y  $d$  son constantes positivas. El potencial no depende ni de  $x$  ni de  $y$ . a) Halle el campo eléctrico (magnitud y dirección) en todos los puntos. b) ¿Qué distribución de carga podría ser la fuente de este campo? Explique su respuesta.

**23.44** Una esfera metálica de radio  $r_a$  está sostenida sobre un soporte aislante en el centro de una coraza metálica esférica hueca de radio  $r_b$ . La esfera interior tiene una carga  $+q$  y la coraza esférica exterior una carga  $-q$ . Calcule el potencial  $V(r)$  cuando i)  $r < r_a$ ; ii)  $r_a < r < r_b$ ; iii)  $r > r_b$ . (Sugerencia: El potencial neto es la suma de los potenciales debidos a las esferas individuales). Tome  $V$  como cero cuando  $r$  es infinito. b) Demuestre que el potencial de la esfera interior con respecto a la exterior es

$$V_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

c) Con base en la ecuación (23.23) y el resultado del inciso (a), demuestre que la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto entre las esferas es

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{(1/r_a - 1/r_b) r^2}$$

d) Con base en la ecuación (23.23) y el resultado del inciso (a), halle el campo eléctrico en un punto situado afuera de la esfera más grande a una distancia  $r$  del centro, donde  $r > r_b$ . e) Suponga que la carga de la esfera exterior no es  $-q$  sino una carga negativa de diferente magnitud, por ejemplo,  $-Q$ . Demuestre que las respuestas a los incisos (b) y (c) siguen siendo las mismas pero la respuesta al inciso (d) es diferente.

**23.45** Una esfera metálica de radio  $r_a = 1.20$  cm está sostenida sobre un soporte aislante en el centro de una coraza metálica esférica hueca de radio  $r_b = 9.60$  cm. Se coloca una carga  $+q$  en la esfera interior y una carga  $-q$  en la coraza esférica exterior. La magnitud de  $q$  se ha elegido de modo que la diferencia de potencial entre las esferas sea de 500 V, con la esfera interior al potencial más alto. a) Calcule  $q$  con base en el resultado del ejercicio 23.44(b). b) Con ayuda del resultado del ejercicio 23.44(a), dibuje las superficies equipotenciales que corresponden a 500, 400, 300, 200, 100 y 0 V. c) Muestre en su dibujo las líneas de campo eléctrico. ¿Son mutuamente perpendiculares las líneas de campo eléctrico y las superficies equipotenciales? ¿Están las superficies equipotenciales más próximas unas de otras cuando la magnitud de  $\vec{E}$  es máxima?

**23.46** Una carga  $Q$  está distribuida uniformemente a lo largo de una varilla de longitud  $2a$ . En el ejemplo 23.12 (sección 23.4) se dejó una expresión del potencial  $V$  en un punto sobre la bisectriz perpendicular de la varilla a una distancia  $x$  de su centro. a) Diferenciando esta expresión, halle la componente  $x$  del campo eléctrico en ese punto. Demuestre que el resultado es la misma expresión hallada en el ejemplo 21.11 (sección 21.5) por integración directa. (Sugerencia: Escribir el logaritmo natural de la fracción como la diferencia de dos logaritmos para simplificar el cálculo). b) Por simetría, en un punto sobre la bisectriz perpendicular de la varilla  $E_y = 0$  y  $E_z = 0$ . Explique por qué no sería correcto sacar estas conclusiones con base en la ecuación (23.19).

**23.47** Se establece una diferencia de potencial de 480 V entre placas metálicas paralelas grandes. Sea el potencial de una de las placas de 480 V y de la otra de 0 V. Las placas están separadas por  $d = 1.70$  cm.

a) Dibuje las superficies equipotenciales que corresponden a 0, 120, 240, 360 y 480 V. b) Muestre en su dibujo las líneas de campo eléctrico. ¿Confirma su dibujo que las líneas de campo y las superficies equipotenciales son mutuamente perpendiculares?

## Problemas

**23.48** Tres esferas pequeñas con una carga de  $2.00 \mu\text{C}$  cada una están dispuestas en línea, con la esfera 2 en medio. Las esferas adyacentes están inicialmente a 8.00 cm una de otra. Las masas de las esferas son  $m_1 = 20.0$  g,  $m_2 = 85.0$  g y  $m_3 = 20.0$  g, y sus radios son mucho menores que su separación. Se dejan libres las tres esferas que inicialmente estaban en reposo. a) ¿Cuál es la aceleración de la esfera 1 inmediatamente después de quedar en libertad? b) ¿Cuál es la rapidez de cada esfera cuando están lejos unas de otras?

**23.49** Una partícula con una carga de  $+7.60$  nC, inicialmente en reposo, está en un campo eléctrico uniforme dirigido hacia la izquierda. Otra fuerza, además de la fuerza eléctrica, actúa sobre la partícula de modo que, cuando ésta queda en libertad, se traslada hacia la derecha. Cuando la partícula ha recorrido 8.00 cm, la fuerza adicional ha realizado  $6.50 \times 10^{-5}$  J de trabajo y la partícula tiene  $4.35 \times 10^{-5}$  J de energía cinética. a) ¿Cuánto trabajo realizó la fuerza eléctrica? b) ¿Cuál es el potencial del punto de partida con respecto al punto final? c) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico?

**23.50** En el modelo de Bohr del átomo de hidrógeno, un único electrón gira alrededor de un solo protón en un círculo de radio  $r$ . Suponga que el protón permanece en reposo. a) Igualando la fuerza eléctrica al producto de la masa del electrón por su aceleración, deduzca una expresión de la rapidez del electrón. b) Obtenga una expresión de la energía cinética del electrón y demuestre que su magnitud es simplemente la mitad de la energía potencial del electrón. c) Obtenga una expresión de la energía total y evalúe ésta con base en  $r = 5.29 \times 10^{-11}$  m. Proporcione el resultado numérico en joules y en electrón volts.

**23.51** En el ejercicio 23.27 se describió un diodo de bulbo de vacío. Debido a la acumulación de carga cerca del cátodo, el potencial eléctrico entre los electrodos no es una función lineal de la posición, incluso con geometría plana, sino que está dado por

$$V(x) = Cx^{4/3}$$

donde  $x$  es la distancia desde el cátodo (electrodo negativo) y  $C$  es una constante, característica del diodo y de las condiciones de funcionamiento en particular. Suponga que la distancia entre el cátodo y el ánodo (electrodo positivo) es de 13.00 mm y que la diferencia de potencial entre electrodos es de 240 V. a) Determine el valor de  $C$ . b) Obtenga una fórmula del campo eléctrico entre los electrodos en función de  $x$ . c) Determine la fuerza sobre un electrón cuando éste se halla a medio camino entre los electrodos.

**23.52** Consulte el problema 22.51. Con respecto a la situación que se muestra en la figura 22.41, calcule la energía que se necesita para trasladar los dos electrones de carga  $-e$  infinitamente lejos uno del otro y de la esfera con carga uniforme. Expresé su respuesta en términos de las distancias  $d$  y  $R$ .

**23.53** **Cristal iónico.** La figura 23.30 muestra ocho cargas puntuales dispuestas en los vértices de un cubo con lados de longitud  $d$ . Los valores de las cargas son  $+q$  y  $-q$ , como se indica. Éste es un modelo de

la celda de un cristal iónico cúbico. En el cloruro de sodio (NaCl), por ejemplo, los iones positivos son  $\text{Na}^+$ , y los iones negativos,  $\text{Cl}^-$ . a) Calcule la energía potencial  $U$  de este arreglo. (Tome como cero la energía potencial de las ocho cargas cuando están infinitamente lejos unas de otras). b) En el inciso (a) usted debió haber hallado que  $U < 0$ . Explique la relación entre este resultado y la observación de que los cristales iónicos de este tipo existen en la naturaleza.

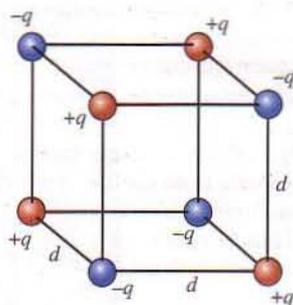


Figura 23.30 Problema 23.53.

**23.54 "Cristal" unidimensional.** Aunque los cristales reales son tridimensionales, es mucho lo que se puede aprender de modelos unidimensionales simples que permiten realizar cálculos con facilidad mucho mayor. Como modelo unidimensional de un cristal iónico como el cloruro de sodio (NaCl), considere iones positivos y negativos alternados de carga  $+e$  y  $-e$ , respectivamente, uniformemente espaciados a lo largo del eje de las  $x$  con una separación  $d$  (Fig. 23.31). Se puede considerar que las cargas se extienden hasta el infinito en ambas direcciones. a) Considere la energía potencial de la interacción entre el ion positivo en  $x = 0$  y todos los demás iones. Esto representa la *energía potencial por ion* de este "cristal" unidimensional. Escriba una expresión de esta energía potencial (la expresión será una serie infinita). b) Evalúe la serie infinita del inciso (a) mediante la expansión  $\ln(1+z) = z - z^2/2 + z^3/3 - z^4/4 + \dots$ , válida en el caso en que  $|z| \leq 1$ . c) ¿Tiene la energía potencial por ion el mismo valor con respecto a los iones negativos del "cristal" que con respecto a los iones positivos? Explique su razonamiento. d) En el cristal tridimensional real de NaCl, la separación entre iones adyacentes es de  $2.82 \times 10^{-10}$  m. Tomando esta separación como el valor de  $d$  en la figura 23.31, calcule la energía potencial por ion en el cristal unidimensional. e) En casi todas las sustancias iónicas cristalinas reales (tridimensionales) como el NaCl, la energía potencial por ion es de alrededor de  $-8 \times 10^{-19}$  J/ion. ¿Cómo es esta cifra en comparación con su resultado del inciso (d)? ¿Qué tan satisfactorio como modelo es el "cristal" unidimensional de la figura 23.31?

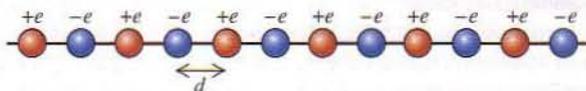


Figura 23.31 Problema 23.54.

**23.55 El ion  $\text{H}_2^+$ .** El ion  $\text{H}_2^+$  consta de dos protones, cada uno con carga  $+e = 1.60 \times 10^{-19}$  C, y un electrón de carga  $-e$  y masa  $9.11 \times 10^{-31}$  kg. La separación entre los protones es de  $1.07 \times 10^{-10}$  m. Podemos tratar los protones y el electrón como cargas puntuales. a) Suponga que el electrón se encuentra en el punto medio entre los dos protones. ¿Cuál es la energía potencial de la interacción entre el electrón y los dos protones? (No incluya la energía potencial debida a la interacción entre los dos protones). b) Suponga que el electrón del inciso (a) tiene una velocidad de magnitud  $1.50 \times 10^6$  m/s en una dirección a lo largo de la bisectriz perpendicular de la recta que enlaza los dos protones. ¿Hasta qué distancia respecto al punto medio entre los dos protones se puede trasladar el electrón? Debido a que la

masa de los protones es mucho mayor que la masa del electrón, los movimientos de los protones son muy lentos y se pueden pasar por alto. (Nota: Una descripción realista del movimiento del electrón exige el uso de la mecánica cuántica, no de la mecánica newtoniana).

**23.56** Una esfera pequeña con una masa de 1.50 g cuelga de un cordel entre dos placas verticales paralelas separadas por una distancia de 5.00 cm. Las placas son aisladoras y tienen densidades de carga superficiales uniformes  $+\sigma$  y  $-\sigma$ . La carga de la esfera es  $q = 8.90 \times 10^{-6}$  C. ¿Qué diferencia de potencial entre la placas hará que el cordel adopte un ángulo de  $30.0^\circ$  con respecto a la vertical (Fig. 23.32)?

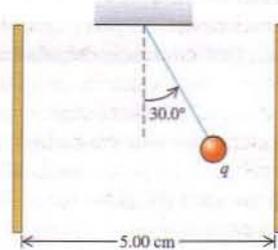


Figura 23.32 Problema 23.56.

**23.57 Cilindros coaxiales.** Un cilindro metálico largo de radio  $a$  está sostenido sobre un soporte aislante sobre el eje de un tubo metálico largo y hueco de radio  $b$ . La carga positiva por unidad de longitud del cilindro interior es  $\lambda$  y el cilindro exterior tiene una carga negativa por unidad de longitud igual. a) Calcule el potencial  $V(r)$  cuando i)  $r < a$ ; ii)  $a < r < b$ ; iii)  $r > b$ . (Sugerencia: El potencial neto es la suma de los potenciales debidos a los conductores individuales). Tome  $V = 0$  en  $r = b$ . b) Demuestre que el potencial del cilindro interior con respecto al exterior es

$$V_{ab} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

c) Con base en la ecuación (23.23) y el resultado del inciso (a), demuestre que la magnitud del campo eléctrico en cualquier punto entre los cilindros es

$$E(r) = \frac{V_{ab}}{\ln(b/a)} \cdot \frac{1}{r}$$

d) ¿Cuál es la diferencia de potencial entre los dos cilindros si el cilindro exterior no tiene carga neta?

**23.58** Un contador Geiger detecta la radiación (por ejemplo, partículas alfa) con base en el hecho de que ésta ioniza el aire a lo lar-

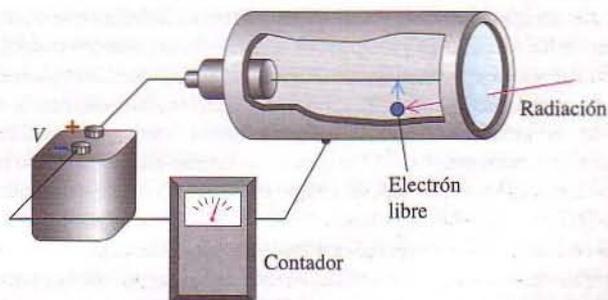


Figura 23.33 Problema 23.58.

go de su trayectoria. Un alambre fino yace sobre el eje de un cilindro metálico hueco y está aislado de él (Fig. 23.33). Se establece una gran diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro exterior, con el alambre al potencial más alto; esto crea un intenso campo eléctrico dirigido radialmente hacia afuera. Cuando la radiación ionizante entra en el dispositivo, ioniza unas pocas moléculas de aire. Los electrones libres así producidos son acelerados por el campo eléctrico hacia el alambre y, en el trayecto, ionizan muchas moléculas de aire adicionales. De este modo se produce una pulsación de corriente que se detecta mediante circuitos electrónicos apropiados y se convierte en un "clic" audible. Suponga que el radio del alambre central es de  $145 \mu\text{m}$  y que el radio del cilindro hueco es de  $1.80 \text{ cm}$ . ¿Qué diferencia de potencial entre el alambre y el cilindro produce un campo eléctrico de  $2.00 \times 10^4 \text{ V/m}$  a  $1.20 \text{ cm}$  de distancia del alambre? (Tanto el alambre como el cilindro son muy largos en comparación con sus radios; por consiguiente, son aplicables los resultados del problema 23.57).

**23.59 Desviación en un TRC.** Los tubos de rayos catódicos (TRC) suelen formar parte de los osciloscopios y los monitores de computadora. En la figura 23.34 se proyecta un electrón con una rapidez inicial de  $6.50 \times 10^6 \text{ m/s}$  a lo largo del eje que pasa por el punto medio entre las placas de desviación de un tubo de rayos catódicos. El campo eléctrico uniforme entre las placas tiene una magnitud de  $1.10 \times 10^3 \text{ V/m}$  y es ascendente. a) ¿Cuál es la fuerza (magnitud y dirección) sobre el electrón cuando éste se halla entre las placas? b) ¿Cuál es la aceleración del electrón (magnitud y dirección) cuando actúa sobre él la fuerza del inciso (a)? c) ¿A qué distancia por debajo del eje ha descendido el electrón cuando alcanza el extremo de las placas? d) ¿Con qué ángulo con respecto al eje se desplaza el electrón cuando sale de entre las placas? e) ¿A qué distancia por debajo del eje incidirá en la pantalla fluorescente P?

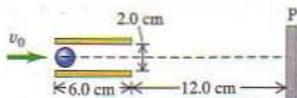


Figura 23.34 Problema 23.59.

**23.60** El tubo de un contador Geiger (problema 23.58) tiene un cilindro metálico largo y hueco de  $2.00 \text{ cm}$  de diámetro. A todo lo largo del eje del tubo hay un alambre de  $0.127 \text{ mm}$  de diámetro. Cuando el tubo está funcionando, se aplica un voltaje de  $850 \text{ V}$  entre los dos conductores. Halle la intensidad del campo eléctrico en a) la superficie externa del alambre; b) la superficie interna del cilindro.

**23.61** Los precipitadores electrostáticos hacen uso de fuerzas eléctricas para eliminar las partículas contaminantes del humo, en particular en las chimeneas de las centrales termoeléctricas que consumen hulla. Un tipo de precipitador consiste en un cilindro metálico vertical hueco con un alambre delgado, aislado del cilindro, a todo lo largo del eje de éste (Fig. 23.35). Se establece una diferencia de potencial grande entre el alambre y el cilindro exterior, con el alambre al potencial más bajo. Esto genera un intenso campo eléctrico radial dirigido hacia adentro. El campo crea una región de aire ionizado cerca del alambre. El humo entra en el precipitador por el fondo, las cenizas y el polvo contenidos en él atrapan electrones, y los contaminantes con carga son acelerados hacia el cilindro exterior por el campo eléctrico. Suponga que el radio del alambre central mide  $90.0 \mu\text{m}$ , el radio del cilindro es de  $14.0 \text{ cm}$  y se establece una diferencia

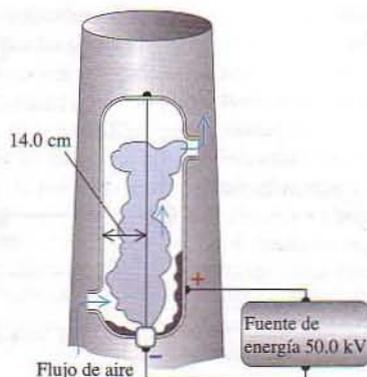


Figura 23.35 Problema 23.61.

de potencial de  $50 \text{ kV}$  entre el alambre y el cilindro. Suponga además que tanto el alambre como el cilindro son muy largos en comparación con el radio del cilindro, por lo que son aplicables los resultados del problema 23.57. a) ¿Cuál es la magnitud del campo eléctrico en el punto medio entre el alambre y la pared del cilindro? b) ¿De qué magnitud debe ser la carga de una partícula de ceniza de  $30.0 \mu\text{g}$  para que el campo eléctrico calculado en el inciso (a) ejerza una fuerza equivalente a diez veces el peso de la partícula?

**23.62** Cuatro segmentos rectilíneos de carga forman un cuadrado con lados de longitud  $a$ . El potencial es cero en el infinito. Calcule el potencial en el centro del cuadrado si a) dos lados opuestos tienen cada uno una carga positiva  $+Q$ , y los otros dos, una carga negativa  $-Q$ ; b) si cada lado tiene una carga positiva  $+Q$ . (Sugerencia: Utilice el resultado del ejemplo 23.12 de la sección 23.3).

**23.63** Un disco de radio  $R$  tiene una densidad de carga superficial  $\sigma$ . a) Considerando el disco como una serie de anillos concéntricos delgados, calcule el potencial eléctrico  $V$  en un punto sobre el eje del disco a una distancia  $x$  del centro del disco. Suponga que el potencial es cero en el infinito. (Sugerencia: Utilice el resultado del ejemplo 23.11 de la sección 23.3). b) Calcule  $-\partial V/\partial x$ . Muestre que el resultado concuerda con la expresión de  $E_x$  calculada en el ejemplo 21.12 (sección 21.5).

**23.64** Una línea de carga de longitud  $2a$  tiene una carga total  $Q$ . En el ejemplo 23.12 (Sección 23.3) se calculó el potencial en un punto a lo largo de la bisectriz perpendicular de la varilla, a una distancia  $x$  de su centro. a) Demuestre que, si  $x \gg 0$ ,  $V(x)$  tiende a  $Q/4\pi\epsilon_0 z$ . Interprete este resultado. (Sugerencia: Cuando  $|z| \ll 1$ ,  $\ln(1+z) \approx z$ ). b) Considere los puntos muy próximos a la varilla, tales que  $x \ll a$ . Simplifique la expresión  $V(x)$  con respecto a este caso especial. Compare el resultado  $V = (\lambda/2\pi\epsilon_0) \ln(R/r)$  obtenido en el ejemplo 23.10 (sección 23.3) con respecto a un cilindro infinitamente largo con carga. ¿Qué corresponde a  $R$  en este límite? ¿Puede explicar este hecho?

**23.65** a) A partir de la expresión de  $E$  obtenida en el problema 22.48, halle las expresiones del potencial eléctrico  $V$  en función de  $r$ , tanto adentro como afuera del cilindro. Sea  $V = 0$  en la superficie del cilindro. En cada caso, exprese su resultado en términos de la carga por unidad de longitud  $\lambda$  de la distribución de carga. b) Grafique  $V$  y  $E$  en función de  $r$  de  $r = 0$  a  $r = 3R$ .

**23.66** Con respecto al problema 21.68, a) calcule el potencial en el punto  $x = 3.00 \text{ cm}$ ,  $y = 0$  y en el punto  $x = 3.00 \text{ cm}$ ,  $y = 5.00 \text{ cm}$

debido a las primeras dos cargas. Sea el potencial cero lejos de las cargas. b) Si la tercera carga se traslada del punto  $x = 3.00$  cm,  $y = 0$  al punto  $x = 3.00$  cm,  $y = 5.00$  cm, calcule el trabajo que realiza sobre ella el campo de las primeras dos cargas. Comente acerca del signo de este trabajo. ¿Es razonable su resultado?

**23.67** Con respecto al anillo de carga descrito en el ejemplo 23.11 (sección 23.3), integre la expresión de  $E_x$  hallada en el ejemplo 21.10 (sección 21.4) para encontrar el potencial en el punto  $P$  del eje del anillo. Suponga que  $V = 0$  en el infinito. Compare su resultado con el que se obtuvo en el ejemplo 23.11 a partir de la ecuación (23.16).

**23.68** Se dobla una varilla aislante delgada para formar un arco semi-circular de radio  $a$  y se distribuye uniformemente a lo largo de la varilla una carga eléctrica  $Q$ . Calcule el potencial en el centro de curvatura del arco, suponiendo que el potencial es cero en el infinito.

**23.69** Con respecto a la situación descrita en el problema 22.30, calcule la magnitud de la diferencia de potencial entre los pares siguientes de caras de un cubo (Fig. 22.32): a)  $S_1$  y  $S_3$ ; b)  $S_2$  y  $S_4$ ; c)  $S_5$  y  $S_6$ . En los casos donde la diferencia de potencial sea diferente de cero, especifique cuál de las caras está al potencial más alto.

**23.70** a) A partir de la expresión de  $E(r)$  obtenida en el ejemplo 22.9 (sección 22.4), halle la expresión del potencial eléctrico  $(V)(r)$  en función de  $r$  tanto adentro como afuera de la esfera con carga uniforme. Suponga que  $V = 0$  en el infinito. b) Grafique  $V$  y  $E$  en función de  $r$  de  $r = 0$  a  $r = 3R$ .

**23.71** Una esfera sólida aislante de radio  $R$  tiene una carga  $Q$  uniformemente distribuida en todo su volumen. a) Con base en los resultados del problema 23.70, halle la magnitud de la diferencia de potencial entre la superficie de la esfera y su centro. b) ¿Qué está al potencial más alto, la superficie o el centro, si i)  $Q$  es positiva? ii) ¿Si  $Q$  es negativa?

**23.72** Una coraza esférica aislante con un radio interior de 25.0 cm y radio exterior de 60 cm tiene una carga de  $+150.0 \mu\text{C}$  uniformemente distribuida en su superficie externa (véase el ejercicio 23.39). El punto  $a$  está en el centro de la coraza, el punto  $b$ , en la superficie interna, y el punto  $c$ , en la superficie externa. a) ¿Cuál será la lectura en un voltímetro conectado entre los puntos siguientes? i)  $a$  y  $b$ ; ii)  $b$  y  $c$ ; iii)  $c$  y el infinito; iv)  $a$  y  $c$ . ¿Qué punto está al potencial más alto? i)  $a$  o  $b$ ; ii)  $b$  o  $c$ ; iii)  $a$  o  $c$ . c) En su caso, ¿cuáles de las respuestas cambiarían de signo si las cargas fuesen de  $-150 \mu\text{C}$ ?

**23.73** El ejercicio 23.39 muestra que, afuera de una coraza esférica con carga superficial uniforme, el potencial es el mismo que si toda la carga estuviera concentrada en una carga puntual en el centro de la esfera. a) Con base en este resultado, demuestre que, en el caso de dos corazas aislantes con carga uniforme, la fuerza que ejercen uno sobre el otro, así como su energía eléctrica mutua, es la misma que si toda la carga estuviese concentrada en sus centros. (Sugerencia: Véase la sección 12.6). b) ¿Es válido este mismo resultado en el caso de esferas sólidas aislantes, con carga distribuida uniformemente en todo su volumen? c) ¿Es válido este mismo resultado con respecto a la fuerza entre dos corazas conductoras con carga? ¿Y entre dos conductores sólidos con carga? Explique sus respuestas.

**23.74** Dos esferas de plástico, cada una con una carga distribuida uniformemente en todo su interior, se ponen inicialmente en contacto y luego se dejan libres. Una de las esferas tiene 60.0 cm de diámetro, una masa de 50 g y una carga de  $-10.0 \mu\text{C}$ . La otra esfera tiene 40.0 cm de diámetro, una masa de 150 g y una carga de

$-30.0 \mu\text{C}$ . Halle la rapidez y la aceleración máximas que alcanza cada esfera, suponiendo que ninguna otra fuerza actúa sobre ellas. (Utilice los resultados del problema 23.73.)

**23.75** Con base en el campo eléctrico calculado en el problema 22.37, calcule la diferencia de potencial entre la esfera conductora sólida y la coraza delgada aislante.

**23.76** Considere una esfera conductora sólida adentro de una esfera conductora hueca, con los radios y cargas que se especifican en el problema 22.36. Tome  $V = 0$  cuando  $r \rightarrow \infty$ . Con base en el campo eléctrico calculado en el problema 22.36, calcule el potencial en los valores siguientes de  $r$ : a)  $r = c$  (en la superficie exterior de la esfera hueca); b)  $r = b$  (en la superficie interior de la esfera hueca); c)  $r = a$  (en la superficie de la esfera sólida); d)  $r = 0$  (en el centro de la esfera sólida).

**23.77** Con base en el campo eléctrico calculado en el problema 22.54, calcule la diferencia de potencial entre las dos caras de la placa con carga uniforme.

**23.78** a) Si una gota esférica de lluvia con un radio de 0.650 mm tiene una carga de  $-1.20 \text{ pC}$  uniformemente distribuida en todo su volumen, ¿cuál es el potencial en su superficie? (Tome el potencial como cero a una distancia infinita de la gota). b) Dos gotas de lluvia idénticas, cada una con el radio y la carga que se especifican en el inciso (a), chocan y se fusionan en una gota más grande. ¿Cuál es el radio de esta gota más grande y cuál es el potencial en su superficie si su carga está distribuida uniformemente en todo su volumen?

**23.79** Se tiene carga eléctrica distribuida uniformemente a lo largo de una varilla delgada de longitud  $a$ , con una carga total  $Q$ . Tome el potencial como cero en el infinito. Halle el potencial en los puntos siguientes (véase la Fig. 23.36): a) punto  $P$ , a una distancia  $x$  a la derecha de la varilla; b) punto  $R$ , a una distancia  $y$  arriba del extremo derecho de la varilla. c) En los incisos (a) y (b), ¿a qué se reduce su resultado a medida que  $x$  o  $y$  se hace mucho más grande que  $a$ ?

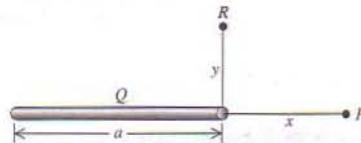


Figura 23.36 Problema 23.79.

**23.80** Una partícula alfa con una energía cinética de 11.0 MeV experimenta un choque frontal con un núcleo de plomo en reposo. ¿Cuál es la distancia de máxima aproximación de las dos partículas? (Suponga que el núcleo de plomo permanece fijo y que se puede tratar como una carga puntual. El número atómico del plomo es 82. La partícula alfa es un núcleo de helio, cuyo número atómico es 2).

**23.81** Dos esferas metálicas de diferente tamaño están cargadas de modo tal que el potencial eléctrico es el mismo en la superficie de cada una. El radio de la esfera  $A$  es tres veces más grande que el de la esfera  $B$ . Sean  $Q_A$  y  $Q_B$  las cargas de cada esfera y  $E_A$  y  $E_B$  las magnitudes del campo eléctrico en la superficie de cada esfera. ¿Cuál es a) la proporción  $Q_B/Q_A$ ; b) la proporción  $E_B/E_A$ ?

**23.82** Utilice la distribución de carga del problema 22.57 y el campo eléctrico calculado en él. a) Demuestre que cuando  $r \geq R$  el potencial es idéntico al que produce una carga puntual  $Q$ . (Tome el potencial como cero en el infinito). b) Obtenga una expresión del potencial eléctrico que sea válida en la región  $r \leq R$ .

**23.83** Una esfera metálica de radio  $R_1$  tiene una carga  $Q_1$ . Tome el potencial eléctrico como cero a una distancia infinita de la esfera. a) ¿Cuáles son el campo eléctrico y el potencial eléctrico en la superficie de la esfera? Esta esfera se conecta ahora mediante un alambre conductor delgado a otra esfera de radio  $R_2$  que está a varios metros de la primera esfera. Antes de efectuar la conexión, esta segunda esfera no tiene carga. Cuando se ha alcanzado el equilibrio electrostático, b) ¿cuál es la carga total de cada esfera? c) ¿el potencial eléctrico en la superficie de cada esfera? d) ¿el campo eléctrico en la superficie de cada esfera? Suponga que la cantidad de carga del alambre es mucho menor que la carga de cada esfera.

**23.84** El potencial eléctrico en cierta región del espacio está dado por

$$V(x, y, z) = A(x^2 - 3y^2 + z^2)$$

donde  $A$  es una constante. a) Deduzca una expresión del campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto de esta región. b) Se mide el trabajo realizado por el campo cuando una carga de prueba de  $1.50 \mu\text{C}$  se desplaza del punto  $(x, y, z) = (0, 0, 0.250 \text{ m})$  al origen, el cual resulta ser de  $6.00 \times 10^{-5} \text{ J}$ . Determine  $A$ . c) Determine el campo eléctrico en el punto  $(0, 0, 0.250 \text{ m})$ . d) Demuestre que en todo plano paralelo al plano  $xz$  los contornos equipotenciales son círculos. e) ¿Cuál es el radio del contorno equipotencial que corresponde a  $V = 1280 \text{ V}$  y  $y = 2.00 \text{ m}$ ?

**23.85 Fusión nuclear en el Sol.** La fuente de la energía solar es una serie de reacciones nucleares que tienen lugar en su núcleo. La primera de estas reacciones consiste en el choque de dos protones, que se fusionan y forman un núcleo más pesado con liberación de energía. Para que tenga lugar este proceso, llamado  *fusión nuclear*, los protones deben aproximarse primero hasta que sus superficies estén prácticamente en contacto. a) Suponga que ambos protones se desplazan con la misma rapidez y que chocan de frente. Si el radio del protón es de  $1.2 \times 10^{-15} \text{ m}$ , ¿cuál es la rapidez mínima que permite que ocurra la fusión? La distribución de carga dentro de un protón es esféricamente simétrica, por lo que el campo eléctrico y el potencial afuera de un protón son los mismos que si éste fuera una carga puntual. La masa del protón se cita en el apéndice F. b) Otra reacción de fusión nuclear que se lleva a cabo en el núcleo del Sol implica un choque entre dos núcleos de helio, cada uno de los cuales tiene 2.99 veces la masa del protón, una carga  $+2e$  y un radio de  $1.7 \times 10^{-15} \text{ m}$ . Suponiendo la misma geometría de colisión que en el inciso (a), ¿qué rapidez mínima se requiere para que esta reacción de fusión se lleve a cabo si los núcleos deben aproximarse hasta una distancia de centro a centro de aproximadamente  $3.5 \times 10^{-15} \text{ m}$ ? Como en el caso del protón, la carga del helio está uniformemente distribuida en todo su volumen. c) En la sección 18.3 se demostró que la energía cinética promedio de traslación de una partícula de masa  $m$  en un gas a una temperatura absoluta  $T$  es  $\frac{3}{2}kT$ , donde  $k$  es la constante de Boltzmann (dada en el apéndice F). Para que dos protones con una energía cinética igual a este valor promedio puedan experimentar el proceso descrito en el inciso (a), ¿qué temperatura absoluta se requiere? ¿Qué temperatura absoluta se requiere para que dos núcleos de helio promedio sufran el proceso descrito en el inciso (b)? (A estas temperaturas los átomos están totalmente ionizados, por lo que los núcleos y electrones se mueven cada uno por su lado). d) La temperatura en el centro del Sol es de alrededor de  $1.5 \times 10^7 \text{ K}$ . ¿Cómo es esta temperatura en comparación con las que se calcularon en el inciso (c)? ¿Cómo es posible que las reacciones descritas en los incisos (a) y (b) ocurran en efecto en el in-

terior del Sol? (Sugerencia: Vea el análisis de la distribución de rapidez molecular en la sección 18.5).

**23.86 Fisión nuclear.** El núcleo inestable de uranio 236 se puede considerar como una esfera con carga uniforme  $Q = +92e$  y de radio  $R = 7.4 \times 10^{-15} \text{ m}$ . En la fisión nuclear, este núcleo se puede dividir en dos núcleos más pequeños, cada uno con la mitad de la carga y del volumen del núcleo original de uranio 236. Esta reacción es una de las que se llevaron a cabo en la bomba nuclear que hizo explosión sobre Hiroshima, Japón, en agosto de 1945. a) Halle los radios de los dos núcleos producto de decaimiento radiactivo con carga  $+46e$ . b) En un modelo simple del proceso de fisión, inmediatamente después que el núcleo de uranio 236 ha sufrido fisión los núcleos producto de decaimiento radiactivo están en reposo y apenas en contacto, como se muestra en la figura 23.37. Calcule la energía cinética que cada uno de los núcleos producto de decaimiento radiactivo tendrá cuando ambos estén muy lejos uno del otro. c) En este modelo la suma de las energías cinéticas de los dos núcleos "hijos" producto de decaimiento radiactivo, calculadas en el inciso (b), es la energía liberada por la fisión de un núcleo de uranio 236. Calcule la energía liberada por la fisión de  $10.0 \text{ kg}$  de uranio 236. La masa atómica del uranio es de  $236 \text{ u}$ , donde  $1 \text{ u} = 1$  unidad de masa atómica  $= 1.66 \times 10^{-27} \text{ kg}$ . Exprese su respuesta en joules y también en kilotones de TNT (1 kilotón de TNT libera  $4.18 \times 10^{12} \text{ J}$  al hacer explosión). d) En términos de este modelo, comente por qué se podría describir igualmente bien una bomba atómica como una "bomba eléctrica".

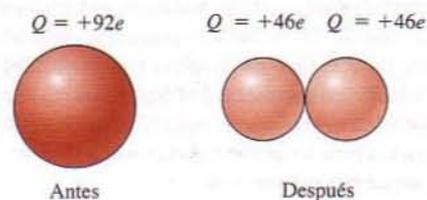


Figura 23.37 Problema 23.86.

### Problemas de desafío

**23.87** En los experimentos en los que chocan núcleos atómicos, ocurren colisiones frontales como las descritas en el problema 23.80, pero los "casi choques" son más comunes. Suponga que la partícula alfa del problema 23.80 no fue "dirigida" hacia el centro del núcleo de plomo, sino que tenía una cantidad de movimiento angular inicial diferente de cero (con respecto al núcleo estacionario fijo de plomo) de magnitud  $L = p_0 b$ , donde  $p_0$  es la magnitud de la cantidad de movimiento inicial de la partícula alfa y  $b = 1.00 \times 10^{-12} \text{ m}$ . ¿Cuál es la distancia de máxima aproximación? Repita con  $b = 1.00 \times 10^{-13} \text{ m}$  y  $b = 1.00 \times 10^{-14} \text{ m}$ .

**23.88** En cierta región existe una distribución de carga esféricamente simétrica pero no uniforme. Es decir, la densidad volumétrica de carga  $\rho(r)$  depende de la distancia  $r$  al centro de la distribución, pero no de los ángulos polares esféricos  $\theta$  y  $\phi$ . El potencial eléctrico  $V(r)$  debido a esta distribución es,

$$V(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 a^2}{18\epsilon_0} \left[ 1 - 3\left(\frac{r}{a}\right)^2 + 2\left(\frac{r}{a}\right)^3 \right] & \text{cuando } r \leq a \\ 0 & \text{cuando } r \geq a \end{cases}$$

donde  $\rho_0$  es una constante con unidades de  $C/m^3$ , y  $a$ , una constante con unidades de metros. a) Deduzca expresiones de  $\vec{E}$  en las regiones  $r \leq a$  y  $r \geq a$ . [Sugerencia: Use la ecuación (23.23)]. Explique por qué  $\vec{E}$  tiene sólo una componente radial. b) Deduzca una expresión de  $\rho(r)$  en cada una de las dos regiones  $r \leq a$  y  $r \geq a$ . [Sugerencia: Aplique la ley de Gauss a dos cascos esféricos, uno de radio  $r$  y otro de radio  $r + dr$ . La carga contenida en el casco esférico infinitesimal de radio  $dr$  es  $dq = 4\pi r^2 \rho(r) dr$ ]. c) Demuestre que la carga neta contenida en el volumen de una esfera de radio mayor o igual que  $a$  es cero. [Sugerencia: Integre las expresiones de  $\rho(r)$  deducidas en el inciso (b) con respecto a un volumen esférico de radio mayor o igual que  $a$ ]. ¿Es este resultado congruente con el campo eléctrico correspondiente a  $r > a$  calculado en el inciso (a)?

**23.89 Experimento de Millikan de la gota de aceite.** La carga de un electrón fue medida por primera vez por el físico estadounidense Robert Millikan entre 1909 y 1913. En su experimento, se rocía aceite en forma de gotas muy finas (de alrededor de aproximadamente  $10^{-4}$  mm de diámetro) en el espacio entre dos placas paralelas horizontales separadas por una distancia  $d$ . Se mantiene una diferencia de potencial  $V_{AB}$  entre las placas paralelas que crea un campo eléctrico descendente entre ellas. Algunas de las gotas de aceite adquieren carga negativa por efectos de fricción o debido a una ionización del aire circundante por medio de rayos X o radiactividad. Se observan las gotas a través de un microscopio. a) Demuestre que una gota de aceite de radio  $r$  en reposo entre las placas permanecerá en reposo si la magnitud de la carga es

$$q = \frac{4\pi}{3} \frac{\rho r^3 g d}{V_{AB}}$$

donde  $\rho$  es la densidad del aceite. (No tome en cuenta la fuerza de flotación del aire). La carga de una gota en particular se puede determinar, siempre y cuando se conozca su radio, ajustando  $V_{AB}$  de modo que la gota se mantenga en reposo. b) Las gotas de Millikan eran demasiado pequeñas para medir su radio directamente. En cambio, Millikan determinó  $r$  cortando el campo eléctrico y midiendo la rapidez terminal  $v_t$  de la gota durante su caída. (Se analizó el concepto de rapidez terminal en la sección 5.3). La fuerza viscosa  $F$  sobre una esfera de radio  $r$  que se desplaza con la rapidez  $v$  a través de un fluido de viscosidad  $\eta$  está dada por la ley de Stokes:  $F = 6\pi\eta r v$ . Cuando la gota cae con  $v_t$ , la fuerza viscosa compensa exactamente el peso  $w = mg$  de la gota. Demuestre que la magnitud de la carga de la gota es

$$q = 18\pi \frac{d}{V_{AB}} \sqrt{\frac{\eta^3 v_t^3}{2\rho g}}$$

Dentro de los límites de su error experimental, cada una de los miles de gotas que Millikan y sus colaboradores midieron tenía una carga igual a algún múltiplo entero pequeño de una carga básica  $e$ .

Es decir, hallaron gotas con cargas de  $\pm 2e$ ,  $\pm 5e$ , etcétera, pero ninguna con valores como  $0.76e$  o  $2.49e$ . Una gota cuya carga es  $-e$  ha adquirido un electrón adicional; si su carga es  $-2e$ , ha adquirido dos electrones adicionales, y así sucesivamente. c) Se observa que una gota de aceite con carga en un aparato de gotas de aceite de Millikan cae 1.00 mm con rapidez constante en 39.3 s si  $V_{AB} = 0$ . La misma gota se mantiene en reposo entre dos placas separadas por 1.00 mm si  $V_{AB} = 9.16$  V. ¿Cuántos electrones en exceso ha adquirido la gota y cuál es el radio de ésta? La viscosidad del aire es de  $1.81 \times 10^{-5}$  N·s/m<sup>2</sup> y la densidad del aceite es de  $824$  kg/m<sup>3</sup>.

**23.90** Un cilindro aislante hueco de paredes delgadas de radio  $R$  y longitud  $L$  (como el tubo de cartón de un rollo de papel sanitario) tiene una carga  $Q$  distribuida uniformemente en su superficie. a) Calcule el potencial eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo. Tome como el origen el centro del tubo y el potencial como cero en el infinito. b) Demuestre que, si  $L \ll R$ , el resultado del inciso (a) se reduce al potencial sobre el eje de un anillo de carga de radio  $R$  (ejemplo 23.11 de la sección 23.3). c) Con base en el resultado del inciso (a), halle el campo eléctrico en todos los puntos a lo largo del eje del tubo.

**23.91** Dos cargas puntuales se desplazan hacia la derecha a lo largo del eje de las  $x$ . La carga puntual 1 tiene una carga  $q_1 = 2.00$   $\mu$ C, una masa  $m_1 = 6.00 \times 10^{-5}$  kg y una rapidez  $v_1$ . La carga puntual 2 está a la derecha de  $q_1$  y tiene una carga  $q_2 = -5.00$   $\mu$ C, una masa  $m_2 = 3.00 \times 10^{-5}$  kg y una rapidez  $v_2$ . En un instante determinado, las cargas están separadas por una distancia de 9.00 mm y su rapidez es en cada caso  $v_1 = 400$  m/s y  $v_2 = 1300$  m/s. Las únicas fuerzas sobre las partículas son las que éstas ejercen una sobre la otra. a) Halle la rapidez  $v_{cm}$  del centro de masa del sistema. b) La energía relativa  $E_{rel}$  del sistema se define como la energía total menos la energía cinética que aporta el movimiento del centro de masa:

$$E_{rel} = E - \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_{cm}^2$$

donde  $E = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0r$  es la energía total del sistema y  $r$  es la distancia entre las cargas. Demuestre que  $E_{rel} = \frac{1}{2}\mu v^2 + q_1q_2/4\pi\epsilon_0r$ , donde  $\mu = m_1m_2/(m_1 + m_2)$  se conoce como la masa reducida del sistema y  $v = v_2 - v_1$  es la rapidez relativa de las partículas en movimiento. c) Con base en los valores numéricos antes citados, calcule el valor numérico de  $E_{rel}$ . d) Con base en el resultado del inciso (c) y en las condiciones antes descritas, ¿escaparán las partículas una de la otra? Explique su respuesta. e) Si las partículas escapan, ¿cuál será su rapidez relativa final cuando  $r \rightarrow \infty$ ? Si las partículas no escapan, ¿cuál será su distancia de máxima separación? Es decir, ¿cuál será el valor de  $r$  cuando  $v = 0$ ? f) Repita los incisos del (c) al (e) con  $v_1 = 400$  m/s y  $v_2 = 1800$  m/s cuando la separación es de 9.00 mm.